

## Завдання 1.

### Неперервність.

Функцію задано різними аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної. Потрібно:

- Вказати проміжки неперервності.
- Знайти точки розриву, якщо вони існують.
- Встановити характер розриву.
- Зобразити графік функції.

$$1. y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0 \end{cases},$$

$$2. y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 2 \\ x^3 + 2, & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$$

$$3. y = \begin{cases} x + 2, & \text{якщо } x \leq 1 \\ -x^2, & \text{якщо } x > 1 \end{cases},$$

$$4. y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0 \\ 3x^2 + 1, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

$$5. y = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{якщо } x < 3 \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 3 \end{cases},$$

$$6. y = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } x < 0 \\ 2 + x, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

$$7. y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2, & \text{якщо } 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

$$8. y = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } x < 0 \\ 1 - x^2, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

$$9. y = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x < 0 \\ 2x + 1, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases},$$

$$10. y = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$11. y = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$12. y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{якщо } x < 1 \\ \ln x, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$$

$$13. y = \begin{cases} \ln(1-x), & \text{якщо } x < 3 \\ x^2 - 1, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases},$$

$$14. y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{якщо } x < 0 \\ x^2 + 3, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

$$15. y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x < 1 \\ \ln(x-1), & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases},$$

$$16. y = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & \text{якщо } x < 0 \\ 1 - 2x, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

$$17. y = \begin{cases} \ln(x-1), & \text{якщо } x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases},$$

$$18. y = \begin{cases} \operatorname{tg}x, & \text{якщо } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ e^{-x}, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

$$19. y = \begin{cases} x+4, & \text{якщо } x < -1 \\ x^2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1 \end{cases},$$

$$20. y = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \leq -1 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$21. y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2 \end{cases},$$

$$22. y = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$$

$$23. y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases},$$

$$24. y = \begin{cases} -x^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2 \\ x+1, & \text{якщо } 3 < x \leq 5 \end{cases},$$

$$25. y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$26. y = \begin{cases} -(x+1), & \text{якщо } x \leq -1 \\ (x+1)^2, & \text{якщо } -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$27. y = \begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \operatorname{tg}x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

$$28. y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$29. y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x < 4 \end{cases},$$

$$30. y = \begin{cases} \operatorname{arctg}x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ -x+3, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$$

$$31. y = \begin{cases} \operatorname{tg}x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2, & \text{якщо } x > \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

$$32. y = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \\ x-2, & \text{якщо } x > \pi \end{cases}$$

$$33. y = \begin{cases} -(x-1)^2, & \text{якщо } -1 < x < 2 \\ x-3, & \text{якщо } x \geq 2 \end{cases}.$$

## Завдання 2.

### Границі

Не користуючись правилом Лопітала знайти границі.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 15x^2 + 100}{4x^3 - 0,1x^2 + 2x}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ ,

в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 5}{x} \right)^{3x}$

2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^4 - 7x^3 + 15}{3 - 5x^2 - 20x^4}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 10}$ ,

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{x^2 + 6x}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 6x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x} \right)^{2x+1}$

3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,1x^3 + 5x - 1}{100x^2 + 37x + 3}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 3x - 10}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{\sqrt{8+x} - 3}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1 - \cos 2x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} [\ln(2+x) - \ln 2]$

4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 + 39}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{3+x}}{x - x^2}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{tg} x}{\sin^2 2x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) [\ln(2x+1) - \ln 2x]$

5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 5}{3 + 4x - 5x^3}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x}}{5x}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3 \sin^2 x)^{\frac{4}{1 - \cos 2x}}$

6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 7}{5x^2 - 4}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 3x - 18}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{3x^2 + x}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{4x^2}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{5x} \ln(1+3x)$

7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 3x + 1}{6x^3 + x^2 + x - 2}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + x - 10}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x^2 - 4x}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 4x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{4x} \ln(1 + 5x)$
8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 13}{x^2 + 7}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x} - x}{x^2 - 16}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{10x^2}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}$
9. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x - 2}{x^3 + 2x + 7}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 4x - 5}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4x} - x}{x^2 - 16}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{10x^2}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}$
10. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 4x^2 + 3}{x^5 + 3x + 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$ ,  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x}}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$
11. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x + 3}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)[\ln(x+3) - \ln x]$
12. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 - x + 2}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2)[\ln(x+1) - \ln x]$
13. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 3}{5x^4 - 2x^3 + 7x}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{\sqrt{5+x} - 2 - 5}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)[\ln(2x+1) - \ln(2x-1)]$

14. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{2 - \sqrt{2x-6}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3)[\ln(x-2)\ln(x+1)]$
15. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{2x^2 - 13x + 20}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x+11}}{2 - \sqrt{x+6}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5)[\ln(x-3) - \ln x]$
16. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22-x}}{1 - \sqrt{4+x}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1)[\ln(2x-1) - \ln(2x+1)]$
17. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{9x^4 + 3x + 5}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{2x^2 + 13x + 20}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5-x}}{3 - \sqrt{8+x}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x-3)[\ln(x+2) - \ln(x-1)]$
18. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{2x^2 - 7x + 3}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{2 - \sqrt{8-x}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\cos x - \cos^3 x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-7)[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$
19. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{41 + 2x + 7x^2}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8x + 15}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{2 - \sqrt{x}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{6x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-7)[\ln(x+4) - \ln x]$
20. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x-x}}{x-5}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{\sin^3 \frac{x}{2}}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + x^2 + 2x^4}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3)[\ln(x + 2) - \ln x]$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{6x^2 - 2x + 1}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{2x}{1-x}}$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 8}{2x^5 + 2x - 1}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}, \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{5x},$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 2)[\ln(3x - 2) - \ln(3x + 1)]$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 4}{4 + 5x + 3x^4}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3}},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{3x}{x-1}}$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 11}{2x^3 + 2x - 5}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x \sin 2x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)[\ln(2x + 3) - \ln(2x - 4)]$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 8x - 2}{x^3 - 2x^2 + 1}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3x} - x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{5x}{x^2 - 1}}$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{1 + 2x^3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2 - x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 3}{x - 2} \right)^x$$

$$28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^4 - x + 2}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - x - 6}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{x+1}$$

$$29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 - 3x - 1}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x - 16}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - \sqrt{8x}}{8 - x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 3}{x} \right)^{5x-3}$$

$$30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - x + 1}{5x^2 + 3x - 7}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 10}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{x^2 + 6x},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\arcsin 5x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 2}{x + 2} \right)^{2x+1}$$

$$31. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 4}{4x^4 + 3x - 1}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 11} \frac{121 - x^2}{\sqrt{11x} - x}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{6 - x - x^2},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{tg^2 6x}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 3x) [\ln(x - 4) - \ln(x + 7)].$$

$$32. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 6x + 10}{3x - 7x^2 + 11x^3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}},$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}, \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2x}{6 + 2x} \right)^{-x+1}.$$

$$33. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 9x + 4}{x^2 + 5x - 3}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^2 - 16}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 11x + 5}{x^2 - 2x - 35},$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}, \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{3x-1}.$$

### Завдання 3.

#### Похідна.

Знайти похідну наступних функцій:

$$1. \text{ а) } y = \sqrt[4]{x^2 + 5x} - \sqrt[3]{(3x+7)^2}, \text{ б) } y = \frac{1+e^x}{1-e^x}, \text{ в) } y = x^{\frac{1}{x}}, \text{ г) } \\ y = \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}, \text{ д) } x \sin y - y \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \text{ а) } y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}, \text{ б) } y = \sin^2 3x, \text{ в) } y = x^{e^x}, \text{ г) } \\ y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \text{ д) } e^{xy} - x^2 + y^2 = a^2$$

$$3. \text{ а) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}, \text{ б) } y = \sqrt{1+\ln^2 x}, \text{ в) } y = x^{\arctg x}, \text{ г) } \\ y = \arccos \frac{1}{x}, \text{ д) } y \sin x + \cos(x-y) = \cos y$$

$$4. \text{ а) } y = \sqrt{x+\sqrt{x}}, \text{ б) } y = \frac{4 \ln x}{1-\ln x}, \text{ в) } y = (\cos x)^{\sin x}, \text{ г) } \\ y = \arctg \sqrt{x^2-1}, \text{ д) } x \sin(x+y) - y \cos x + y^2 = 0$$

$$5. \text{ а) } y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{1+x^3}, \text{ б) } y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x, \text{ в) } y = (\ln x)^x, \\ \text{ г) } y = \arctg x + \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}, \text{ д) } x - y + e^y \arctg x = 0$$



6. а)  $y = x\sqrt{1+x^2}$ , б)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+tgx}{1-tgx}} - x$ , в)  $y = x^{\sin x}$ , г)

$y = \arctg(\sin x)$ , д)  $\ln y = \arcsin \frac{x}{y}$

7. а)  $y = 5\sqrt[5]{4x+3} - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ , б)  $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ ,

в)  $y = (\cos x)^x$ , г)  $y = \arccos(tgx)$ , д)  $x + y + e^{xy} = 2$

8. а)  $y = 3\sqrt[3]{x^5+5x^4-3x^{-1}}$ , б)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ , в)  $y = x^x$ , г)  
 , д)  $2x^2 + xy - y^3 = 0$

9. а)  $y = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$ , б)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ , в)  $y = x^{\arcsin x}$ , г)

$y = \arccos e^x$ , д)  $\ln y = \arctg \frac{x}{y}$

10. а)  $y = x + 5\sqrt{\frac{1+x^5}{1-x^5}}$ , б)  $y = tg^2(x^3+1)$ , в)  $y = x^{tgx}$ , г)

$y = \arctg \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ , д)  $xy + \arcsin(x+y) = 0$

11. а)  $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$ , б)  $y = (e^{\cos x} + 3)^3$ ,

в)  $y = (\cos x)^x$ , г)  $y = \ln \sin(2x+5)$ , д)  $tg \frac{y}{x} = 5(x+y)$

12. а)  $y = x^2 \sqrt{1-x^2}$ , б)  $y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 2x}$ , в)  $y = x^{\frac{1}{x}}$ , г)  $y = \arctg e^{2x}$ ,

д)  $x - y + \arcsin y = 0$

13. а)  $y = x * \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ , б)  $y = \frac{1}{tg^2 2x}$ , в)  $y = x^{\ln x}$ , г)

$y = \arcsin \sqrt{1-3x}$ , д)  $y \cos x = \sin(x-y)$

$$14. \text{ a) } y = \frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}, \quad \text{б) } y = \sin x - x \cos x, \quad \text{в) } y = x^{\operatorname{tg} x}, \quad \text{г) }$$

$$y = x^m * e^{nx}, \quad \text{д) } \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

$$15. \text{ a) } y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{б) } y = \sin^2 x * (2 + 3 \cos^2 x),$$

$$\text{в) } y = \frac{x \ln x}{x-1}, \quad \text{г) } y = \frac{x \ln x}{x-1}, \quad \text{д) } (e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$$

$$16. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 5\sqrt[3]{x^3 + 1}, \quad \text{б) } y = 2 \operatorname{tg}^3(x^2 + 1), \quad \text{в) } y = x^{\operatorname{arctg} x}, \quad \text{г) }$$

$$y = 3^{\ln(1-x^2)}, \quad \text{д) } y^2 * x = e^{\frac{y}{x}}$$

$$17. \text{ a) } y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}, \quad \text{б) } y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x, \quad \text{в) } y = (x^2 + 1)^x, \quad \text{г) }$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}, \quad \text{д) } x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$18. \text{ a) } y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}, \quad \text{б) } y = 3\sqrt[3]{x_3 + 5x^4 + x}, \quad \text{в) } y = (\sin x)^{\ln x},$$

$$\text{г) } y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x), \quad \text{д) } x - y + a \sin(x + y) = 0$$

$$19. \text{ a) } y = 5\sqrt{x^2 + x} + \frac{1}{x}, \quad \text{б) } y = 2^{\sqrt{x}} * e^{-x}, \quad \text{в) } y = (\cos x)^{x^2}, \quad \text{г) }$$

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{д) } \ln y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

$$20. \text{ a) } y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}, \quad \text{б) } y = \frac{1}{3} * \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x \sin x, \quad \text{в) }$$

$$y = (\sin x)^{x^3}, \quad \text{г) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x^2-2}}, \quad \text{д) } y - xy + e^y \arcsin x = 0$$

$$21. \text{ а) } y = \left( \frac{1}{27x} - \frac{1}{9x^2} \right) \sqrt{3x + x^2}, \quad \text{б) } y = \sin^3 5x \cos^5 3x, \quad \text{в) } y = \ln \left( x^2 + \sqrt{x^4 + 1} \right), \quad \text{г) } y = e^{\arccos x}, \quad \text{д) } x^2 y - y^2 x + xy = 0$$

$$22. \text{ а) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \text{б) } y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad \text{в) } y = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{г) } y = e^{\operatorname{arctg} x}, \quad \text{д) } y \sin x - \cos y = 0$$

$$23. \text{ а) } y = \frac{2x-1}{\sqrt{1-x}}, \quad \text{б) } y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}, \quad \text{в) } y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}, \quad \text{г) } y = \left( \arcsin \frac{\sqrt{x}}{3} \right)^3, \quad \text{д) } x^3 + xy^2 + x^2 y + y^3 = a^3$$

$$24. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}, \quad \text{б) } y = \frac{2 \sin x}{1 \cos x}, \quad \text{в) } y = e^{-x} \ln x, \quad \text{г) } y = 3 \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \quad \text{д) } x^2 + y^2 - 6xy = 5$$

$$25. \text{ а) } y = 2\sqrt[3]{(2-x^3)^2}, \quad \text{б) } y = x^2 \sin^3 2x, \quad \text{в) } y = \arcsin \frac{1}{x}, \quad \text{г) } y = \ln \left( x^2 + 5x + \sqrt{x} - \frac{2}{x} \right), \quad \text{д) } x^4 - 2xy^3 + a^3 y = 0$$

$$26. \text{ а) } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \text{б) } y = 2 \operatorname{tg}^3(x^2 + 1), \quad \text{в) } y = x \ln^2 x, \quad \text{г) } y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{x}, \quad \text{д) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = a + \frac{1}{4} y^2$$

$$27. \text{ а) } y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a + x}, \quad \text{б) } y = \sqrt{x} \sin x^2, \quad \text{в) } y = \ln \sin(2x + 5), \quad \text{г) } y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{д) } xe^y - y + 1 = a$$

$$28. \text{ a) } y = \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2 + 2)^3}}, \quad \text{б) } y = (e^{\sin x} - 1)^3, \quad \text{в) } y = \ln(2 - \cos x), \quad \text{г) }$$

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{д) } x - y + \arctg y = 0$$

$$29. \text{ a) } y = \frac{\sqrt{1 - 4x}}{x^2}, \quad \text{б) } y = \cos 2x - 2 \sin^2 x, \quad \text{в) } y = \ln \sin(2x + 5),$$

$$\text{г) } y = \arccos \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{д) } y \ln x - x \ln y = 1$$

$$30. \text{ a) } y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}, \quad \text{б) } y = \sqrt{x} \cos^2 x, \quad \text{в) } y = \ln^4 \sin^3 3x, \quad \text{г) }$$

$$y = \arctg e^{2x}, \quad \text{д) } e^y - xy + \sin(x - y) = \pi$$

$$31. \text{ a) } y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}, \quad \text{б) } y = \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}, \quad \text{в) } y = e^{3x-1} \cdot \left(x^3 + \frac{x}{4}\right),$$

$$\text{г) } y = (\cos 4x)^{x^2}, \quad \text{д) } x^3 y^2 + x = 7 \sin y$$

$$32. \text{ a) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x^3}}, \quad \text{б) } y = \frac{4 \arccos 3x^2}{(x + 2)^8}, \quad \text{в) } y = \ln(2 + e^{3x}),$$

$$\text{г) } y = \left(\frac{x}{27} + \frac{1}{3x^2}\right) \sqrt{3 - 2x + x^2}, \quad \text{д) } x - y + y \arctg^2(xy) = 0$$

$$33. \text{ a) } y = \ln \sqrt{\frac{2 + \cos x}{2 - \cos x}}, \quad \text{б) } y = \sqrt[6]{\frac{x}{3}} \arccos(1 - 5x^7), \quad \text{в) }$$

$$y = (\operatorname{ctg} 3x)^{4x}, \quad \text{г) } y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{2}{25x^2} - x^3\right), \quad \text{д) } 3 \sin^2(x + y) = x - y^2.$$

#### Завдання 4.

#### Дослідження функцій

Дослідити функцію методом диференціального числення і побудувати їх графіки.

$$1. y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, 2. y = \frac{x}{x^2 + 1}, 3. y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}, 4. y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}, ,$$

$$5. y = \frac{x^3}{4 - x^2}, 6. y = \frac{x}{1 - x^2}, 7. y = xe^{-x}, 8. y = x \ln x,$$

$$9. y = 2x^4 - x^2 + 1, 10. y = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2, 11. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2},$$

$$12. y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}, 13. y = \ln(4 - x^2), 14. y = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

$$15. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, 16. y = \frac{4x}{4 + x^2}, 17. y = \frac{x^2}{x - 1}, 18. y = \frac{x^3}{x^2 + 1},$$

$$19. y = \ln(x^2 + 1), 20. y = \frac{x^3}{x^2 + 1}, 21. y = \frac{x^2}{4 - x^2}, 22. y = \frac{x^3 + 1}{x^2},$$

$$23. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}, 24. y = 12x - x^3, 25. y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7,$$

$$26. y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}, 27. y = \frac{1}{5}x^4 - 2x^2 + 5, 28. y = \ln(x^2 - 9),$$

$$29. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}, 30. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, 31. y = (x + 1) \cdot e^{2x},$$

$$32. y = \frac{2(x + 1)^2}{x - 2}, 33. y = e^{2x - x^2}.$$

### Завдання 5.

#### Застосування диференціала до наближених обчислень

Замінивши приріст функції її диференціалом та, перейшовши до “гарної точки”, обчислити приблизно такі значення.

1.  $\sqrt[3]{26,96}$

2.  $e^{0,03}$

3.  $\ln 0,98$

4.  $2^{3,92}$

5.  $\sqrt[6]{1,04}$

6.  $\lg 9,99$

7.  $7,01^{-3}$

8.  $3^{-1,02}$

9.  $\arcsin 0,49$

10.  $\cos 0,04$

11.  $\sqrt[4]{15,97}$

12.  $\log_3 8,96$

13.  $1,01^{10}$

14.  $\frac{1}{\sqrt{8,98}}$

15.  $e^{-0,97}$

16.  $\arctg 1,03$

17.  $\sqrt[3]{625,02}$

18.  $e^{1,95}$

19.  $\log_4 15,97$

20.  $10^{1,99}$

21.  $\frac{1}{\sqrt[3]{16,04}}$

22.  $\ln,92$

23.  $5,02^{-2}$

24.  $6^{2,98}$

25.  $\arccos 5,03$

26.  $\operatorname{tg}(-0,02)$

27.  $\sqrt[5]{32,06}$

28.  $\log_2 \frac{1}{15,99}$

29.  $\operatorname{arcctg} 0,95$

30.  $0,97^{15}$

31.  $\sqrt{121,01}$

32.  $\frac{1}{\cos 0,02}$

33.  $\arcsin 0,52$