

Міністерство освіти і науки України
Українська академія друкарства
Кафедра прикладної математики і фізики

Коляда Р. В., Мельник О. М.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Ч. 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

для студентів спеціальностей

122 Комп'ютерні науки (група КН-11) та

126 Інформаційні системи та технології (група ІСТ-11)

(модуль 1 другого семестру першого курсу 2019-2020 н. р.)

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і фізики
Української академії друкарства (протокол № 1 від 29 серпня 2019 р.)

Номер варіанта завдання співпадає з номером студента у журналі групи

Львів – 2019

Ч. 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1. Задано вершини трикутника ABC : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти:

- 1) довжину і рівняння сторони AB ;
- 2) рівняння і довжину висоти CH ;
- 3) рівняння медіани AM ;
- 4) точку перетину прямих CH і AM ;
- 5) рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ;
- 6) проекцію вектора AB на вектор AC ;
- 7) напрямні косинуси вектора AC ;
- 8) площу трикутника ABC ;
- 9) рівняння прямих, що проходять через вершину C паралельно та перпендикулярно до сторони AB ;
- 10) Знайти координати точки D , такої, щоб чотирикутник $ABCD$ став паралелограмом.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $A(2,5), B(-3,1), C(0,4)$, | 2. $A(1,-3), B(0,7), C(-2,4)$, |
| 3. $A(0,2), B(-7,-4), C(3,2)$, | 4. $A(-2,-6), B(-3,5), C(4,0)$, |
| 5. $A(10,-2), B(4,-5), C(-3,1)$, | 6. $A(-7,-2), B(-7,4), C(5,-5)$, |
| 7. $A(-4,2), B(6,-4), C(4,10)$, | 8. $A(6,-9), B(10,-1), C(-4,1)$, |
| 9. $A(4,-4), B(6,2), C(-1,8)$, | 10. $A(-4,2), B(8,-6), C(2,6)$, |
| 11. $A(-3,-3), B(5,-7), C(7,7)$, | 12. $A(4,-3), B(7,3), C(1,10)$, |
| 13. $A(-2,-3), B(1,6), C(6,1)$, | 14. $A(1,0), B(-1,4), C(9,5)$, |
| 15. $A(-3,-2), B(14,4), C(6,8)$, | 16. $A(-5,1), B(8,-2), C(1,4)$, |
| 17. $A(7,0), B(1,4), C(-8,-4)$, | 18. $A(-7,-2), B(3,-8), C(-4,6)$, |
| 19. $A(-3,-1), B(-4,-5), C(8,1)$, | 20. $A(-1,-4), B(9,6), C(-5,4)$, |
| 21. $A(3,-1), B(11,3), C(-6,2)$, | 22. $A(4,1), B(-3,-1), C(7,-3)$, |
| 23. $A(-3,8), B(-6,2), C(0,-5)$, | 24. $A(-5,2), B(0,-4), C(5,7)$, |
| 25. $A(1,-6), B(3,4), C(-3,3)$, | 26. $A(-2,4), B(3,1), C(10,7)$, |
| 27. $A(4,-4), B(8,2), C(3,8)$, | 28. $A(-4,2), B(-6,6), C(6,2)$, |
| 29. $A(1,-2), B(7,1), C(3,7)$, | 30. $A(1,7), B(-3,-1), C(11,-3)$. |

3.2. Розв'язати наступні задачі:

- 2.1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$ і відсікає на осі абсцис відрізок, який дорівнює трьом.
- 2.2. Знайти проекцію точки $A(-8, 12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2, -3)$ і $C(-5, 1)$.
- 2.3. Задані дві вершини трикутника ABC : $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ і точка $M(4, 2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини C .
- 2.4. Знайти рівняння прямої, яка відсікає на осі ординат відрізок у дві одиниці довжини і паралельна прямій $2y - x = 3$.
- 2.5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2, -3)$ і точку перетину прямих $2x - y = 5$ і $x + y = 1$.
- 2.6. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – трапеція, якщо $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$ і $D(-5, 5)$.
- 2.7. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно до прямої BC , якщо $B(2, 5)$ і $C(1, 0)$.

- 2.8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2, 1)$ паралельно прямій MP , якщо $M(-3, -2)$ і $P(1, 6)$.
- 2.9. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(2, -1)$ відносно прямої $x - 2y + 3 = 0$.
- 2.10. Знайти точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$ і $D(3, -5)$.
- 2.11. Знайти точку перетину прямих $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ і рівняння прямої паралельної осі абсцис, якій належить ця точка.
- 2.12. У $\triangle ABC$ відомі відповідно: рівняння сторони AB $4x + y = 6$, висоти BH $5x - 4y = 12$ і висоти AM $x + y = 6$. Знайти рівняння двох інших сторін.
- 2.13. Відомі дві вершини $\triangle ABC$ $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ і точка перетину його висот $H(1, 2)$. Знайти координати точки M перетину сторони AC і висоти BH .
- 2.14. Відомі точки $A(-2, 7)$, $B(6, 5)$, $C(-6, -2)$ і $D(2, -4)$. Довести, що прямі AB і CD паралельні.
- 2.15. Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, які проведені через середини сторін трикутника з вершинами: $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$.
- 2.16. Скласти рівняння висоти, що проходить через вершину A трикутника ABC , якщо відомі рівняння його сторін: $-2x - y - 3 = 0$; $-x + 5y - 7 = 0$; $-3x - 2y + 13 = 0$.
- 2.17. Заданий трикутник з вершинами: $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$ і $C(5, -12)$. Знайти рівняння і довжину його медіани CM .
- 2.18. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку перетину прямих: $2x + 5y - 8 = 0$ і $2x + 3y + 4 = 0$.
- 2.19. Знайти рівняння перпендикулярів до прямої $3x + 5y - 15 = 0$, які проведені через точки перетину цієї прямої з осями координат.
- 2.20. Відомі рівняння сторін чотирикутника: $x - y = 0$; $x + 3y = 0$; $x - y - 4 = 0$ і $3x + y - 12 = 0$. Знайти рівняння його діагоналей.
- 2.21. Знайти точку перетину медіани CM і висоти BK в $\triangle ABC$, якщо $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$.
- 2.22. Через точку $P(5, 2)$ провести пряму: а) яка відсікає рівні відрізки на осях координат; б) паралельна осі Ox ; в) паралельна осі Oy .
- 2.23. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2, 3)$ і утворює з віссю Ox кут: а) 45° ; б) 90° ; в) 0° .
- 2.24. Яку ординату має точка C , що лежить на одній прямій з точками $A(-6, 6)$ і $B(-3, -1)$ і має абсцису, що дорівнює трьом?
- 2.25. Через точку перетину прямих $2x - 5y - 1 = 0$ і $x + 4y - 7 = 0$ провести пряму, яка ділить відрізок між точками $A(4, -3)$ і $B(-1, 2)$ у відношенні $\lambda = 2 : 3$.
- 2.26. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Знайти рівняння другої діагоналі.
- 2.27. Знайти точку E перетину висот у трикутнику ABC , якщо $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$, $C(5, -3)$.
- 2.28. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $A(-1, 1)$ під кутом 45° до прямої $2x + 3y = 6$.
- 2.29. Відомі рівняння висот $\triangle ABC$: $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ і координати його вершини $A(2, 3)$. Знайти рівняння його сторін AB і AC .
- 2.30. Задані рівняння двох сторін паралелограма: $x - 2y = 0$; $x - y - 1 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Знайти рівняння двох інших сторін.

3.3. Скласти канонічні рівняння: а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи.

Тут: A , B – точки, які лежать на кривій; F – фокус; a – більша (дійсна) піввісь; b – менша (уявна) піввісь; ε – ексцентриситет; k – кутовий коефіцієнт у рівнянні асимптоти гіперболи; D – директриса кривої; $2c$ – міжфокусна відстань; $x = a$ або $y = b$ – рівняння директриси.

$B \bullet$	а)	б)	в)
3.1.	$a = 15; F(-10, 0)$	$a = 13; \varepsilon = 14/13$	$D; x = -4$
3.2.	$A(3, 0); B(2, \sqrt{5}/3)$	$A(-3, 4); B(-5, 4\sqrt{5})$	$D: y = 1$
3.3.	$\varepsilon = \sqrt{21}/5; A(-5, 0)$	$A(\sqrt{80}, 3); B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	$D: x = 5$
3.4.	$b = 2; F(4\sqrt{2}, 0)$	$a = 7; \varepsilon = \sqrt{85}/7$	$D: y = -2$
3.5.	$a = 11; \varepsilon = \sqrt{57}/11$	$k = 2/3; C = 5\sqrt{13}$	$D: x = -2$
3.6.	$b = \sqrt{15}; \varepsilon = \sqrt{10}/5$	$k = 3/4; a = 8$	$D: y = 2$
3.7.	$a = 4; F(3, 0)$	$A(4, -6); B(6, 4\sqrt{6})$	$D: x = 3$
3.8.	$b = 4; F(9, 0)$	$b = 2\sqrt{10}; F(-11, 0)$	$D: y = -4$
3.9.	$A(0, \sqrt{3}); B(\sqrt{14}/3, 1)$	$a = 5; \varepsilon = 7/5$	$D: x = -1$
3.10.	$A(4, -2); B(2, \sqrt{7})$	$\varepsilon = 8/7; A(-7, 0)$	$D: y = 4$
3.11.	$a = 12; \varepsilon = \sqrt{22}/6$	$k = 4/3; c = 5$	$D: x = 4$
3.12.	$b = 2; \varepsilon = 5\sqrt{29}/29$	$A(-4, -3); B(8, 9)$	$D: y = -1$
3.13.	$b = 7; F(5, 0)$	$k = 12/13; a = 13$	$D: x = -3$
3.14.	$a = 6; F(-4, 0)$	$b = 3; F(7, 0)$	$D: y = 3$
3.15.	$A(-\sqrt{17}/3, 1/3),$ $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$	$a = 11; \varepsilon = 12/11$	$D: x = 2$
3.16.	$\varepsilon = 3/5; A(0, 8)$	$A(\sqrt{6}, 0); B(-2\sqrt{2}, 1)$	$D: y = -3$
3.17.	$a = 11; \varepsilon = 10/11$	$A(8, 12); B(-6, 2\sqrt{15})$	$D: x = -5$
3.18.	$b = 5; \varepsilon = 12/13$	$k = \sqrt{11}/5; c = 6$	$D: y = 5$
3.19.	$a = 9; F(7, 0)$	$b = 6; F(12, 0)$	$D: x = 1$
3.20.	$b = 5; F(-10, 0)$	$a = 9; \varepsilon = 4/3$	$D: y = -5$
3.21.	$A(0, -2); B(\sqrt{15}/2, 1)$	$k = \sqrt{29}/14; c = 15$	$D: x = -1/4$
3.22.	$\varepsilon = 2/3; A(-6, 0)$	$A(8, 6); B(10, -3\sqrt{10})$	$D: y = 1/4$
3.23.	$a = 25; \varepsilon = 3/5$	$A(\sqrt{2}, 0); B(\sqrt{20}/3, 2)$	$D: x = 1/2$
3.24.	$b = 2\sqrt{15}; \varepsilon = 7/8$	$k = 5/6; a = 6$	$D: y = -1/3$
3.25.	$a = 13; F(-5, 0)$	$b = 4; F(-7, 0)$	$D: x = -1/2$
3.26.	$b = 7; F(13, 0)$	$A(\sqrt{32}/3, 1); B(\sqrt{8}, 0)$	$D: y = 1/3$
3.27.	$A(-3; 0); B(1, \sqrt{40}/3)$	$A(10, -3\sqrt{3}); k = 3/5$	$D: x = 1/3$
3.28.	$\varepsilon = 5/6; A(0, -\sqrt{11})$	$b = 4; F(-11, 0)$	$D: y = -1/2$
3.29.	$a = 15; \varepsilon = 15/17$	$k = \sqrt{17}/8; c = 9$	$D: x = -1/3$
3.30.	$b = 2\sqrt{2}; \varepsilon = 7/9$	$k = \sqrt{2}/2; a = 6$	$D: y = 1/2$

3.4. Записати рівняння кола, яке проходить через зазначені точки і має центр у точці А. Виконати рисунок.

- 4.1. Вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0, -2)$.
- 4.2. Вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0, 4)$.
- 4.3. Фокуси гіперболи $25x^2 - 24y^2 = 600$, $A(0, -8)$.
- 4.4. $B(-2, 5)$, A – вершина параболи $x^2 = 3y$.
- 4.5. Фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$, $A(0, 6)$.
- 4.6. Фокуси еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A – його верхня вершина.
- 4.7. Фокус гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0, -3)$.
- 4.8. Вершини гіперболи $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0, -2)$.
- 4.9. Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0, -4)$.
- 4.10. $B(1, 2)$, A – вершина параболи $y^2 = -3x$.
- 4.11. Фокус еліпса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(0, 7)$.
- 4.12. Фокус гіперболи $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0, 6)$.
- 4.13. Фокуси еліпса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A – його верхня частина.
- 4.14. Вершини гіперболи $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0, 4)$.
- 4.15. Фокуси гіперболи $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0, 5)$.
- 4.16. $B(1, 4)$, A – вершина параболи $x^2 = -2y$.
- 4.17. Фокус еліпса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1, -3)$.
- 4.18. Вершина гіперболи $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0, -6)$.
- 4.19. Фокуси еліпса $24x^2 + 25y^2 = 600$, A – його верхня вершина.
- 4.20. Вершина гіперболи $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1, 3)$.
- 4.21. Фокус гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1, -2)$.
- 4.22. $B(2, -5)$, A – вершина параболи $y^2 = 2x$.
- 4.23. Фокус еліпса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2, -7)$.
- 4.24. Вершина гіперболи $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2, 5)$.
- 4.25. Фокуси еліпса $x^2 + 10y^2 = 90$, A – його нижня вершина.
- 4.26. Вершина гіперболи $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5, -2)$.
- 4.27. Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0, -6)$.
- 4.28. $B(3, 4)$, A – вершина параболи $x^2 = -4y$.
- 4.29. Фокус еліпса $13x^2 + 49y^2 = 637$, $A(1, 8)$.
- 4.30. Фокус гіперболи $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2, 8)$.

3.5. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої відповідає заданим умовам.

Виконати рисунок.

- 5.1. Розміщена від прямої $x = -6$ на відстані, у два рази більшій, ніж від точки $A(1, 3)$.
- 5.2. Розміщена від прямої $x = -2$ на відстані, у два рази більшій, ніж від точки $A(4, 0)$.
- 5.3. Розміщена від прямої $y = -2$ на відстані, у три рази більшій, ніж від точки $A(5, 0)$.
- 5.4. Відношення відстаней від точки M до точок $A(2, 3)$ і $B(-1, 2)$ дорівнює $\frac{3}{4}$.
- 5.5. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(4, 0)$ і $B(-2, 2)$ дорівнює 28.
- 5.6. Розміщена від точки $A(1, 0)$ на відстані, в п'ять разів меншій, ніж від прямої $x = 8$.
- 5.7. Розміщена від точки $A(4, 1)$ на відстані, в чотири рази більшій, ніж від точки $B(-2, -1)$.
- 5.8. Розміщена від прямої $x = -5$ на відстані, у три рази більшій, ніж від точки $A(6, 1)$.
- 5.9. Розміщена від прямої $y = 7$ на відстані, в п'ять разів більшій, ніж від точки $A(4, -3)$.
- 5.10. Відношення відстаней від точки M до точок $A(-3, 5)$ і $B(4, 2)$ дорівнює $\frac{1}{3}$.
- 5.11. Сума квадратів відстаней від точки M до очок $A(-5, -1)$ і $B(3, 2)$ дорівнює 40,5.
- 5.12. Розміщена від точки $A(2, 1)$ на відстані, у три рази більшій, ніж від прямої $x = -5$.
- 5.13. Розміщена від точки $A(-3, 3)$ на відстані, у три рази більшій, ніж від точки $B(5, 1)$.
- 5.14. Розміщена від прямої $x = 8$ на відстані, у два рази більшій, ніж від точки $A(-1, 7)$.
- 5.15. Розміщена від прямої $x = 9$ на відстані, в чотири рази меншій, ніж від точки $A(-1, 2)$.
- 5.16. Відношення відстаней від точки M до точок $A(2, -4)$ і $B(3, 5)$ дорівнює $\frac{2}{3}$.
- 5.17. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-3, 3)$ і $B(4, 1)$ дорівнює 31.
- 5.18. Розміщена від точки $A(0, -5)$ на відстані, в два рази меншій, ніж від прямої $x = 3$.
- 5.19. Розміщена від точки $A(4, -2)$ на відстані, в два рази меншій, ніж від точки $B(1, 6)$.
- 5.20. Розміщена від точки $A(1, 4)$ на відстані, у три рази більшій, ніж від прямої $x = -7$.
- 5.21. Розміщена від прямої $x = 14$ на відстані, у два рази меншій, ніж від точки $A(2, 3)$.
- 5.22. Відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -2)$ і $B(4, 6)$ дорівнює $\frac{3}{5}$.
- 5.23. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-5, 3)$ і $B(2, 1)$ дорівнює 31.
- 5.24. Розміщена від точки $A(3, -4)$ на відстані, в два рази більшій, ніж від прямої $x = 5$.
- 5.25. Розміщена від точки $A(5, 7)$ на відстані, в чотири рази більшій, ніж від точки $B(-2, 1)$.
- 5.26. Розміщена від прямої $x = 2$ на відстані, в п'ять разів більшій, ніж від точки $B(-2, 1)$.
- 5.27. Розміщена від прямої $x = -7$ на відстані, в три рази меншій, ніж від точки $A(3, 1)$.
- 5.28. Відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -5)$ і $B(4, 1)$ дорівнює $\frac{1}{4}$.
- 5.29. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-1, 2)$ і $B(3, -1)$ дорівнює 18,5.
- 5.30. Розміщена від точки $A(1, 5)$ на відстані, в чотири рази меншій, ніж від прямої $x = -1$.