ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ЗА КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Модуль І. Матриці. Визначники. Системи лінійних рівнянь.

№ тижня	Теми лекцій	Теми практичних занять	Індивідуальні завдання	Самостійна робота
1	2	3	4	5
1	1. Матриці. *Основні поняття. Дії над матрицями. Транспонування матриць.*	1. Матриці.	№ 1.	1. Матриці.
2	2. Визначники. *Основні поняття. Властивості визначників.*	2. Визначники.	№ 2.	2. Визначники.
3	3. Невироджені матриці. *Основні поняття. Обернена матриця. Ранг матриці.*	3. Невироджені матриці.		3. Невироджені матриці.
4	4. Системи лінійних рівнянь. *Розв'язання невироджених лінійних систем. Розв'язання довільних лінійних систем.*	4. Системи лінійних рівнянь.	№ 3, № 4..	Модульний контроль І.

Розділ І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
Лекція 1

§1. МАТРИЦІ

1.1. Основні поняття

Матрицею (числовою матрицею) називається прямокутна таблиця складена з $m \cdot n$ чисел вигляду

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}. \end{matrix}$$

Матрицю позначають наступним чином:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

або, скорочено, $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$, де $i = 1, 2, \dots, m$ – номер рядка, $j = 1, 2, \dots, n$ – номер стовпця.

Матрицю A називають матрицею *розміру* $m \times n$ і записують $A_{m \times n}$. Числа a_{ij}, які складають матрицю, називаються її *елементами.*

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

що містить один стовпчик називається ***матрицею-стовпцем***.

Матриця $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$, що містить один рядок, називається ***матрицею-рядком***.

Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється з цим числом.

Матриці рівні між собою, якщо рівні всі відповідні елементи цих матриць, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною.*** Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею n*-го порядку*. Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють ***головну діагональ***.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, рівні нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі рівні одиниці, називається ***одиничною.*** Її позначають буквою E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

– одинична матриця n-го порядку.

Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо всі елементи, що розташовані по одну сторону від головної діагоналі, рівні нулю.

Матрицю довільних розмірів називають ***трапецієвидною***, якщо вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ відмінні від нуля.

Матриця, всі елементи якої рівні нулю, називається ***нульовою*** і позначається буквою O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричному численні матриці O і E відіграють роль чисел 0 і 1 в арифметиці.

1.2. Дії над матрицями

Додавання. Дія додавання матриць вводиться тільки для матриць однакових розмірів.

Сумою двох матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$ така, що $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Сума трьох матриць $A+B+C$ – це матриця, яка отримується послідовним додаванням даних матриць, тобто $A+B+C=(A+B)+C$.

Аналогічно визначається $A_1+A_2+\ldots+A_n$ для $n>3$.

Приклад 1.1. Знайти суму $A+B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Множення матриці на число. ***Добутком матриці*** $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число*** α (або числа α на матрицю $A_{m\times n}$) називається матриця $B_{m\times n}=(b_{ij})$ така, що $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$.

Добуток матриці A на число α позначається αA або $A\alpha$.

Приклад 1.2. Знайти добуток матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

на число $\alpha=-2$.

Розв'язок.

$$-2A=\begin{pmatrix} -4 & -14 & 0 \\ 10 & -2 & -18 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Матриця $-1A=-A$ називається *протилежною* до матриці A.

Різницю матриць $A-B$ можна визначити як $A-B=A+(-B)$.

Операції додавання матриць і множення матриці на число називають ***лінійними операціями над матрицями*** і мають наступні ***властивості***:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
8. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$,

де *A, B, C, O* – матриці, α,β – числа.

Множення матриць. Операція множення двох матриць вводиться тільки для випадку, коли *число стовпців першої матриці рівне числу рядків другої матриці*. Такі матриці називаються ***узгодженими***.

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на матрицю*** $B_{n\times p}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ik})$ така, що $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}$, де $i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}$, тобто елемент *i*-го рядка і k-го стовпчика матриці C дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпчика матриці B.

Приклад 1.3. Знайти добуток AB, якщо

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix},\ B_{3\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$C_{2\times2}=A_{2\times3}B_{3\times2}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+7\cdot0+0\cdot6 & 2\cdot4+7\cdot(-2)+0\cdot(-4) & 2\cdot3+7\cdot(-1)+0\cdot7 \\ -5\cdot1+1\cdot0+9\cdot6 & -5\cdot4+1\cdot(-2)+9\cdot(-4) & -5\cdot3+1\cdot(-1)+9\cdot7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 49 & -58 & 47 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Якщо *A* і *B* квадратні матриці одного порядку, то добутки *AB* і *BA* завжди існують. Якщо $AB=BA$, то матриці *A* і *B* називаються *переставочними.*

Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, а матриця B узгоджена з матрицею C, то під добутком ABC трьох матриць розуміємо матрицю, отриману послідовним множенням даних матриць, тобто – $(AB)C$.

Операція множення матриць має ***властивості***:

1. $A \cdot E = E \cdot A = A$;
2. $A \cdot O = O \cdot A = O$;
3. $(AB)C = A(BC)$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
5. $(A + B)C = AC + BC$;
6. $C(A + B) = CA + CB$,

де *A, B, C* – матриці, E, O – одинична та нульова матриці відповідно, α – число.

Елементарні перетворення матриць. Елементарними перетвореннями матриць є наступні перетворення:

1) множення деякого рядка або стовпця матриці на число відмінне від нуля;
2) додавання до одного рядка або стовпця матриці іншого рядка або стовпця, помноженого на довільне число;
3) перестановка місцями двох рядків або стовпців матриці.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою елементарних перетворень і позначаються $A \sim B$.

1.3. Транспонування матриць

Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка (стовпчика) стовпчиком (рядком) з тим же номером, називається ***транспонованою*** до даної.

Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T.

Операція знаходження матриці, транспонованої до даної, називається ***транспонуванням матриці.***

Якщо A – матриця розмірів $m \times n$, то A^T має розміри $n \times m$.

Справедливі наступні ***властивості***:

1. $(A^T)^T = A$;

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$, де A і B – матриці однакових розмірів;

4. $(AB)^T = B^T A^T$, де матриця A узгоджена з матрицею B.

Приклад 1.4. Знайти матрицю, транспоновану до матриці

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

1.1. Що називається матрицею розмірів $m\times n$?

1.2. Які матриці називаються рівними?

1.3. Яка матриця називається квадратною?

1.4. Яка матриця називається діагональною?

1.5. Яка матриця називається одиничною?

1.6. Яка матриця називається трикутною?

1.7. Яка матриця називається трапецієвидною?

1.8. Яка матриця називається нульовою?

1.9. Які дії над матрицями називаються лінійними?

1.10. Які властивості лінійних операцій над матрицями?

1.11. Які матриці називаються узгодженими?

1.12. Що називається добутком матриці A на матрицю B?

1.13. Які властивості добутку матриць?

1.14. Які перетворення матриць називають елементарними?

1.15. Яка матриця називається транспонованою до даної?

1.16. Які властивості має операція транспонування матриці?

З а д а ч і т а в п р а в и

1.1. Вказати розміри матриць:

$$а)\ \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix};\quad б)\ \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 7 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\quad в)\ \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 16 & 5 \end{pmatrix};\quad г)\ (7).$$

1.2. Чому рівні в матриці А елементи a_{41}, a_{22}, a_{32}, *якщо*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 9 & 5 & 12 \\ 6 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}?$$

1.3. Вказати, які з матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 27 \\ 0 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ A_8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_9 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є: а) діагональними; б) одиничними; в) трикутними; г) трапецієвидними?

1.4. Знайти матрицю X, якщо

$$а)\ -5 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 13 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\quad б)\ X + \begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Знайти:

$$3 \cdot B \cdot A - (A+B)^T + 2 \cdot E,$$

$$де\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Обчислення розіб'ємо на окремі дії:

1) $B\cdot A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&5&2\\3&6&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&1&0\\2&-1&3\\0&2&6\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot4+3\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot2 & 2\cdot0+3\cdot3+1\cdot6\\ 4\cdot4+5\cdot2+2\cdot0 & 4\cdot1+5\cdot(-1)+2\cdot2 & 4\cdot0+5\cdot3+2\cdot6\\ 3\cdot4+6\cdot2+(-1)\cdot0 & 3\cdot1+6\cdot(-1)+(-1)\cdot2 & 3\cdot0+6\cdot3+(-1)\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&1&15\\26&3&27\\24&-5&12\end{pmatrix};$$

2) $3\cdot A\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix}14&1&15\\26&3&27\\24&-5&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42&3&45\\78&9&81\\72&-15&36\end{pmatrix};$

3) $A+B=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&-1&3\\0&2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&1\\4&5&2\\3&6&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&1\\6&4&5\\3&8&5\end{pmatrix};$

4) $(A+B)^T=\begin{pmatrix}6&6&3\\4&4&8\\1&5&5\end{pmatrix};$ 5) $2\cdot E=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix};$

6) $3\cdot B\cdot A-(A+B)^T=\begin{pmatrix}42&3&45\\78&9&81\\72&-15&36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&6&3\\4&4&8\\1&5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36&-3&42\\74&5&73\\71&-20&31\end{pmatrix};$

7) $3\cdot B\cdot A-(A+B)^T+2\cdot E=\begin{pmatrix}36&-3&42\\74&5&73\\71&-20&31\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38&-3&42\\74&7&73\\71&-20&33\end{pmatrix}.$◄

1.6. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix}3&-1\\8&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&7\\1&5&4\end{pmatrix};$ *б)* $\begin{pmatrix}9&8&5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\-6\\12\\-3\end{pmatrix};$ *в)* $\begin{pmatrix}2&6&4\\0&3&9\\1&7&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\8\end{pmatrix}.$

Лекція 2

§2. ВИЗНАЧНИКИ

2.1. Основні поняття

Квадратній матриці A порядку n можна поставити у відповідність ***число,*** яке називається її ***визначником*** або *детермінантом* і позначається $\det A$ або $|A|$, або Δ та обчислюється наступним чином:

1. $n=1$, $A=(a_{11})$:

$$\det A = a_{11}.$$

2. $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

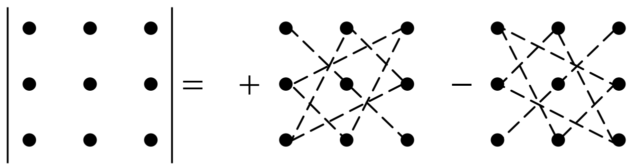
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для обчислення визначника 3-го порядку зручно користуватися ***правилом трикутників***, яке можна зобразити схематично:



Правило обчислення визначника для матриці порядку $n>3$ є досить складним для сприйняття і застосування. Проте відомі методи, що дають можливість обчислити визначники високих порядків на основі визначників низьких порядків. Деякі з них розглянемо далі.

Приклад 2.1. Обчислити визначник матриці $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Розв'язок.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -2\cdot 7 - 5\cdot 4 = -14 - 20 = -34. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.2. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot 9 + 3\cdot 0\cdot 4 + (-2)\cdot 7\cdot 6 - 6\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot(-2)\cdot 9 - 0\cdot 7\cdot 5 =$$

$$= 45 + 0 - 84 - 24 + 54 - 0 = -9. \blacktriangleleft$$

2.2. Властивості визначників

Сформулюємо основні властивості визначників, які справедливі для визначників всіх порядків. Деякі з них пояснимо на визначниках 3-го порядку.

1. *Визначник матриці, транспонованої до даної, рівний визначнику даної матриці*:

Дійсно, $\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} = \det A.$$

2. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) рівні нулю, то визначник рівний нулю*:

Дійсно, $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0\cdot a_{22}a_{33} + 0\cdot a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}\cdot 0 -$

$$- a_{31}a_{22}\cdot 0 - a_{21}\cdot 0\cdot a_{33} - a_{32}a_{23}\cdot 0 = 0.$$

3. *Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника*:

$$\det A=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

4. *При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник міняє знак*:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

5. *Якщо визначник має два однакові рядки (стовпчики), то він рівний нулю.*

Дійсно, міняючи місцями однакові рядки (стовпчики) і враховуючи властивість 4, отримаємо $\det A=-\det A=0$.

6. *Якщо визначник має два пропорційні рядки (стовпчики), то він рівний нулю.*

Дійсно, якщо винести коефіцієнт пропорційності λ за знак визначника, то отримаємо визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками).

7. *Визначник, у якого кожний елемент деякого рядка (стовпчика) є сумою двох доданків, рівний сумі двох визначників, у першого з яких у вказаному рядку (стовпчику) стоять перші доданки, а в другому – другі доданки, інші рядки (стовпчики) у всіх визначників однакові:*

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}^{(1)}+a_{12}^{(2)} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}^{(1)}+a_{22}^{(2)} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}^{(1)}+a_{32}^{(2)} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}^{(1)} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}^{(2)} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}^{(2)} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

8. *Якщо матриця B отримана з матриці A додаванням до деякого рядка (стовпчика) іншого рядка (стовпчика), помноженого на число* λ, то $\det B=\det A$.

Ця властивість випливає з властивостей 6, 7.

Подальші властивості визначників пов'язані з поняттями мінору та алгебраїчного доповнення.

Мінором M_{ij} ***елемента*** a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник n-1-го порядку, отриманий з початкового шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпчика (на перетині яких знаходиться вибраний елемент).

Якщо $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} ***елемента*** a_{ij} квадратної матриці називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

тобто його мінор, взятий із знаком "+", якщо сума $i+j$ – парне число, та із знаком "$-$", якщо сума $i+j$ непарна.

Так, наприклад, $A_{11} = M_{11}$, $A_{12} = -M_{12}$.

9. Розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпчика. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення цих елементів:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

де i – номер фіксованого рядка, $1 \le i \le n$, або

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

де j – номер фіксованого стовпчика, $1 \le j \le n$.

Проілюструємо і доведемо властивість 9 на прикладі визначника 3-го порядку. Так розклад за елементами 1-го рядка має вигляд

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = \det A.$$

10. *Сума добутків елементів деякого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпчика) рівна нулю.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11} \cdot (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{12} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{13} \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) =$$
$$- a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{13} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{12} = 0.$$

11. *Визначник трикутної матриці (або визначник трикутного вигляду) дорівнює добутку елементів її головної діагоналі:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Дійсно, розкладаючи визначник за елементами 1-го стовпчика, отримаємо

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник знову розкладемо за елементами 1-го стовпчика:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

Аналогічно можна показати, що

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Властивість 9 – розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпчика – дозволяє звести обчислення визначників n-го порядку до обчислення n визначників $n-1$-го порядку.

Використовуючи властивості визначників, можна перетворити визначник n-го порядку так, щоб всі елементи деякого рядка або стовпця, крім можливо одного, дорівнювали нулю. Таким чином, обчислення визначника n-го порядку, якщо він відмінний від нуля, зводиться до обчислення визначника $n-1$-го порядку.

Приклад 2.3. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

розклавши його за елементами деякого рядка або стовпчика.

Розв'язок. Для розкладу визначника зазвичай вибирають той рядок або стовпчик, де є нульові елементи, так як відповідні їм доданки в розкладі будуть рівні нулю, тому розкладемо визначник за елементами 1-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(42+6) + 2\cdot(28+10) = 3\cdot 48 + 2\cdot 38 = 144 + 76 = 220. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.4. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

використовуючи властивості визначників.

Розв'язок. Приведемо визначник до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 4 & 6 & -2\\ 5 & 3 & 7\end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 8 & -2\\ 5 & 3 & 7\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 8 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ 5 & 3 & 7\end{vmatrix}\times(-3)\ \times(-5) =$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & 8 & -2\\ 0 & -26 & 6\\ 0 & -37 & 17\end{vmatrix}\times(-1) = -\begin{vmatrix}1 & 8 & -2\\ 0 & 11 & -11\\ 0 & -37 & 17\end{vmatrix} = -11\cdot\begin{vmatrix}1 & 8 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -37 & 17\end{vmatrix}\times 37 =$$

$$= -11\cdot\begin{vmatrix}1 & 8 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -20\end{vmatrix} = -11\cdot(-20) = 220. \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

2.1. Що називається визначником матриці 1-го порядку?

2.2. Що називається визначником матриці 2-го порядку?

2.3. Що називається визначником матриці 3-го порядку?

2.4. Які основні властивості визначників?

2.5. Що називається мінором елемента a_{ij} матриці n-го порядку?

2.6. Що називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці n-го порядку?

2.7. Які є методи обчислення визначників n-го порядку?

Задачі та вправи

2.1. Обчислити визначники:

$$а)\ \begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 8\end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 7\\ 5 & -6 & 2\end{vmatrix}.$$

2.2. Обчислити визначники, використовуючи властивості визначників:

$$а)\ \begin{vmatrix}2 & 4 & -7\\ 8 & 16 & 13\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix}3 & 6 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 7 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 8\end{vmatrix};\quad в)\ \begin{vmatrix}150 & 128\\ 500 & 256\end{vmatrix}.$$

2.3. Знайти алгебраїчні доповнення елементів a_{12}, a_{21}, a_{33} *матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.4. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

трьома способами:

а) за означенням (правило трикутника);

б) розклавши за елементами рядка або стовпчика;

в) звівши за допомогою властивостей до трикутного вигляду.

2.5. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Використовуючи властивості визначників, зведемо обчислення визначника 4-го порядку до обчислення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-5) \quad \times 2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 12 & -5 & -25 \\ 0 & 17 & -19 & -44 \\ 0 & -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} = -(-1)^{1+1} M_{11} = -\begin{vmatrix} 12 & -5 & -25 \\ 17 & -19 & -44 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 4 \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 12 & -5 & -25 \\ 1 & 9 & -4 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 12 & -5 & -25 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 16 & 5 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 4 \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 16 & 5 \\ 0 & 43 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 43 & -6 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-6) - 43 \cdot 5 = -96 - 215 = -311. \blacktriangleleft$$

Лекції 3–4

§3. НЕВИРОДЖЕНІ МАТРИЦІ

3.1. Основні поняття

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається ***невиродженою***, якщо її визначник $\det A \neq 0$, в протилежному випадку ($\det A = 0$) матрицю називають ***виродженою***.

Матрицею, ***союзною до матриці*** A, називається матриця

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

3.2. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою до матриці*** A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Будь-яка невироджена матриця має обернену.*

Д о в е д е н н я . Знайдемо добуток матриць A і C:

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+...+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+...+a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1}+...+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+...+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+...+a_{2n}A_{2n} & \dots & a_{21}A_{n1}+...+a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11}+...+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+...+a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}A_{n1}+...+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}.$$

З властивостей визначників 9, 10 отримаємо

$$AC=\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}=\det A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\det A\cdot E,$$

тобто

$$AC=\det A\cdot E. \tag{3.2}$$

Аналогічно доводимо, що

$$CA=\det A\cdot E. \tag{3.3}$$

Рівності (3.2), (3.3) перепишемо у вигляді

$$A\cdot\left(\frac{1}{\det A}C\right)=E,\quad \left(\frac{1}{\det A}C\right)\cdot A=E,\quad (\det A\neq 0).$$

Порівнюючи отримані результати з означенням (3.1), робимо висновок:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Властивості оберненої матриці:

1. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$;

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

3. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

Приклад 3.1. Вияснити,чи існує обернена матриця A^{-1} до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

і, якщо існує, то знайти її.

Розв'язок. Знаходимо визначник матриці A:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-6+1)-3\cdot(-9+2)-2\cdot(3-4)=5+21+2=28\neq 0.$$

Отже, дана матриця невироджена, і A^{-1} існує.

Згідно формули (3.4)

$$A^{-1}=\frac{1}{28}\cdot C=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів даної матриці:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=9-2=7; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-(-6+1)=5;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-(-3-4)=7; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-9+2=-7;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+6=7; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-4)=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(6+1)=-7;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9-2=-11.$$

Тоді $A^{-1}=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 7 & -7 & -7\\ 7 & 1 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{-7}{28} & \frac{-7}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{28}\end{pmatrix}.$

Перевірка:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{7}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{-7}{28} & \frac{-7}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{28}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 7 & -7 & -7\\ 7 & 1 & -11\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}3\cdot7+2\cdot7+(-1)\cdot7 & 3\cdot5+2\cdot(-7)+(-1)\cdot1 & 3\cdot1+2\cdot(-7)+(-1)\cdot(-11)\\ 1\cdot7+(-3)\cdot7+2\cdot7 & 1\cdot5+(-3)\cdot(-7)+2\cdot1 & 1\cdot1+(-3)\cdot(-7)+2\cdot(-11)\\ 2\cdot7+1\cdot7+(-3)\cdot7 & 2\cdot5+1\cdot(-7)+(-3)\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-7)+(-3)\cdot(-11)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}28 & 0 & 0\\ 0 & 28 & 0\\ 0 & 0 & 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Також

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{7}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{-7}{28} & \frac{-7}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{28}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 7 & -7 & -7\\ 7 & 1 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}7\cdot3+5\cdot1+1\cdot2 & 7\cdot2+5\cdot(-3)+1\cdot1 & 7\cdot(-1)+5\cdot2+1\cdot(-3)\\ 7\cdot3-7\cdot1-7\cdot2 & 7\cdot2-7\cdot(-3)-7\cdot1 & 7\cdot(-1)-7\cdot2-7\cdot(-3)\\ 7\cdot3+1\cdot1-11\cdot2 & 7\cdot2+1\cdot(-3)-11\cdot1 & 7\cdot(-1)+1\cdot2-11\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}28 & 0 & 0\\ 0 & 28 & 0\\ 0 & 0 & 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.\ \blacktriangleleft$$

3.3. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розмірів $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків і k стовпців ($k \le \min(m,n)$). З елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, складемо визначник k-го порядку. Всі такі визначники називаються ***мінорами*** даної ***матриці.*** (Відмітимо, що таких мінорів можна скласти $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сполучень з n елементів по k).

Найбільший з порядків мінорів даної матриці, відмінних від нуля, називають ***рангом матриці*** і позначають r, $r(A)$, $\mathrm{rang}A$.

Очевидно, що $0 \le r \le \min(m,n)$.

Мінор, порядок якого визначає ранг, називається ***базисним.*** Позначатимемо його $M_б$. У ненульової матриці може бути декілька базисних мінорів.

Приклад 3.2. Використовуючи означення, знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

і вказати базисні мінори.

Розв'язок. Серед мінорів 1-го порядку (елементів матриці) є відмінні від нуля, отже, $r \ge 1$. Серед мінорів 2-го порядку є відмінні від нуля, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15 \ne 0 .$$

Отже, $r \ge 2$. Всі мінори 3-го порядку рівні нулю. Таким чином, $r = 2$.

В якості базисного мінору можна взяти

$$M_б = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \ne 0 \quad \text{або} \quad M_б = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \ne 0 . \blacktriangleleft$$

Відмітимо ***властивості*** рангу матриці:

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.
2. Якщо викреслити з матриці нульовий рядок або стовпчик, то її ранг не зміниться.

3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

Неважко показати, що за допомогою елементарних перетворень будь-яку ненульову матрицю A можна привести до трапецієвидного вигляду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $b_{11},\ b_{12},\ \dots,\ b_{rr}$ відмінні від нуля.

Викреслимо в матриці B рядки, всі елементи яких рівні нулю. Ранг отриманої матриці, що складається з r рядків, рівний r, так як мінор порядку r, що стоїть у верхньому лівому куті, відмінний від нуля. Отже, і ранг матриці B рівний r – кількості ненульових рядків.

Так як матриця B отримана з матриці A шляхом елементарних перетворень, то ранг матриці A теж рівний r.

Приклад 3.3. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. За допомогою елементарних перетворень зведемо дану матрицю до трапецієвидного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3)\ \ \times(-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 15 & -25 \\ 0 & 19 & 19 & -38 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 1/19 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 15 & -25 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 12 & 15 & -25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-12) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг отриманої матриці рівний трьом, а отже і ранг даної матриці рівний трьом. ◀

Теоретичні питання

3.1. Яка матриця називається невиродженою?

3.2. Яка матриця називається союзною?

3.3. Яка матриця називається оберненою?

3.4. Для якої матриці існує обернена?

3.5. Запишіть формулу, за якою знаходиться обернена матриця.

3.6. Які властивості оберненої матриці?

3.7. *Що називається мінором матриці?*

3.8. *Що називається рангом матриці?*

3.9. *Що називається базисним мінором матриці?*

3.10. Як знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень?

Задачі та вправи

3.1. Знайти матриці, обернені до даних, якщо вони існують:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix};\quad \text{в)}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix};\quad \text{г)}\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ -8 & 7 & -2 \\ 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2. Знайти ранг матриці та вказати один із базисних мінорів:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -8 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{в)}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

§4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Основні поняття

Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називаються ***коефіцієнтами системи***, числа b_i – ***вільними членами***; x_j – ***невідомі.***

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

складена з коефіцієнтів при невідомих системи (4.1), називається ***матрицею*** або ***основною матрицею системи***, а матриця

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

отримана з матриці A дописуванням стовпця з вільних членів, називається ***розширеною матрицею системи***.

Систему (4.1) зручно записувати ***в матричній формі***:

$$AX = B,$$

де A – матриця системи,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпчик з невідомих x_j,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпчик з вільних членів b_i.

Добуток матриць AX визначений, так як матриця A узгоджена з матрицею X.

Впорядкована система чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$ називається ***розв'язком системи*** (4.1), якщо кожне з рівнянь системи перетворюється в правильну рівність після підстановки замість $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідних чисел $c_1, c_2, ..., c_n$.

Розв'язок $(c_1, c_2, ..., c_n)$ можна записати у вигляді матриці-стовпця

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок і ***невизначеною***, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожний її розв'язок називається ***частинним розв'язком системи.*** Сукупність всіх частинних розв'язків системи називається ***загальним розв'язком.***

Розв'язати систему – означає вияснити, сумісна вона чи несумісна, і у випадку сумісності знайти її загальний розв'язок.

Дві системи називаються ***еквівалентними (рівносильними)***, якщо вони мають один і той же загальний розв'язок.

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени рівні нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Однорідна система завжди сумісна, так як

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

є розв'язком системи. Цей розв'язок називається ***нульовим*** або ***тривіальним***.

Система (4.2), крім тривіального, може мати і інші розв'язки (нетривіальні).

Елементарними перетвореннями системи назвемо наступні перетворення:

1) множення деякого рівняння системи на число відмінне від нуля;
2) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число;
3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

При елементарних перетвореннях системи відповідні елементарні перетворення зручно виконувати над рядками розширеної матриці системи.

4.2. Розв'язання невироджених лінійних систем

Нехай дана система n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.3}$$

або в матричній формі $AX = B$.

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається ***визначником системи*** (4.3).

Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система називається ***невиродженою***, в протилежному випадку – ***виродженою***.

Знайдемо розв’язок даної системи рівнянь у випадку, коли $\Delta \neq 0$. В цьому випадку для матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівняння $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{4.4}$$

Знаходження розв’язку системи за формулою (4.4) називають ***матричним способом розв’язку системи***.

Матричну рівність (4.4) запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \ldots + A_{nn} b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta};$$

$$x_2 = \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \ldots + A_{nn} \cdot b_n}{\Delta}.$$

Сума $A_{11} \cdot b_1 + A_{21} b_2 + \ldots + A_{n1} b_n$ є розкладом визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами першого стовпчика. Визначник Δ_1 отримується з визначника Δ шляхом заміни першого стовпчика стовпчиком вільних членів.

Таким чином, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогічно: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, де Δ_2 – отриманий з Δ шляхом заміни другого стовпчика коефіцієнтів стовпчиком вільних членів; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формули

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = \overline{1, n} \tag{4.5}$$

називаються ***формулами Крамера.***

Таким чином, невироджена система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв’язок, який може бути знайденим матричним способом (4.4) або за формулами Крамера (4.5).

Приклад 4.1. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \end{cases}$$

а) матричним способом; б) за формулами Крамера.

Розв’язок. а) Матриця системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-(-3) \cdot 2 \cdot 3 = 6 + 8 - 3 + 8 + 1 + 18 = 38 \neq 0.$$

Отже, система невироджена.

Обернена матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+3) = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-8) = 9; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-9-4) = 13;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Тоді $A^{-1} = \dfrac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 9 & -7 & -5 \\ 5 & 13 & -7 \end{pmatrix}.$

За формулою (4.4)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 9 & -7 & -5 \\ 5 & 13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 \\ 9 \cdot 2 - 7 \cdot (-1) - 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 2 + 13 \cdot (-1) - 7 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $\begin{cases} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 = 2, \\ 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -1, \\ 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - (-1) = 5. \end{cases}$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

б) За формулами (4.5) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Знайдемо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 38 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot(-3)\cdot 1 - 5\cdot(-2)\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot(-1) -$$

$$-(-3)\cdot 2\cdot 2 = 4 + 10 + 3 + 10 - 1 + 12 = 38;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 5\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-1) - 5\cdot 2\cdot 3 =$$

$$= 3 + 16 + 5 + 4 + 2 - 30 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 5 + 1\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-3)\cdot 2 - 4\cdot(-2)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 5 -$$

$$-(-3)\cdot(-1)\cdot 3 = -30 - 4 - 6 + 16 - 5 - 9 = -38.$$

Таким чином, $x_1 = \dfrac{38}{38} = 1$; $x_2 = \dfrac{0}{38} = 0$; $x_3 = \dfrac{-38}{38} = -1$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. ◀

4.3. Розв'язання довільних лінійних систем. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай дана довільна система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Відповідь на питання щодо сумісності цієї системи дає терема Кронекера-Капеллі:

Теорема 4.1. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи рівний рангу основної матриці.*

Приймемо її без доведення.

Правила знаходження всіх розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь випливають з наступних теорем:

Теорема 4.2. *Якщо ранг сумісної системи рівний кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.*

Теорема 4.3. *Якщо ранг сумісної системи менший кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.*

Правило розв'язання довільних лінійних систем.

1. Знайти ранги основної і розширеної матриць системи. Якщо $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несумісна.
2. Якщо $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, то система сумісна. Знайти базисний мінор порядку r. Взяти r рівнянь, з коефіцієнтів яких складений базисний мінор (інші рівняння відкинути). Невідомі, коефіцієнти при яких входять в базисний мінор, називають ***базисними*** або ***основними*** і залишають зліва, а інші $n-r$ невідомих називають ***вільними*** або ***неосновними*** і переносять в праві частини рівнянь.
3. Виразити базисні невідомі через вільні. Отримаємо загальний розв'язок системи.
4. Надаючи вільним невідомим довільних значень, отримаємо відповідні значення базисних невідомих. Таким чином можна знайти частинні розв'язки системи рівнянь.

4.4. Розв’язання лінійних систем методом Гауса

Універсальним методом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який полягає в послідовному виключенні змінних.

Нехай дана система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Процес розв’язання за методом Гауса складається з двох етапів. На першому етапі (прямий хід) система зводиться до ступінчастого (зокрема, до трикутного) вигляду.

Наведена нижче система має ступеневий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

де $k \le n,\ \ a_{ii} \ne 0,\ \ i = \overline{1,k}$.

На другому етапі (обернений хід) йде послідовне знаходження невідомих з цієї ступінчастої системи.

Опишемо метод Гауса детальніше. *Прямий хід.*

Вважатимемо, що елемент $a_{11} \ne 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то першим в системі запишемо рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля).

Перетворимо систему (4.6), виключивши невідому x_1 з усіх рівнянь, крім першого, використовуючи елементарні перетворення системи. Для цього помножимо обидві частини першого рівняння на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і додамо почленно до другого рівняння системи. Потім помножимо обидві частини першого рівняння на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і додамо до третього рівняння системи. Продовжуючи цей процес, отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{m2}^{(1)}x_k + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

де $a_{ij}^{(1)},\ b_i^{(1)},\ i, j = \overline{2, m},$ – нові значення коефіцієнтів і вільних членів, які отримуються після першого кроку.

Аналогічно, вважаючи $a_{22}^{(1)} \neq 0$, виключаємо невідому x_2 з усіх рівнянь системи, крім першого і другого, і так далі. Продовжуємо цей процес поки це можливо.

Якщо в процесі приведення системи (4.6) до ступінчастого вигляду з'являться нульові рівняння, тобто рівняння вигляду $0 = 0$, то їх відкидаємо. Якщо ж з'являться рівняння вигляду $0 = b_i,\ b_i \neq 0$, то система несумісна.

Обернений хід. Розв'язуємо ступінчасту систему, яка, взагалі, має безліч розв'язків. В останньому рівнянні цієї системи виражаємо першу невідому x_k через інші невідомі $x_{k+1},\ldots,x_n$. Потім підставляємо значення x_k в передостаннє рівняння системи і виражаємо невідому x_{k-1} через невідомі $x_{k+1},\ldots,x_n$; потім знаходимо $x_{k-2},\ldots,x_1$. Надаючи вільним невідомим $x_{k+1},\ldots,x_n$ довільних значень, отримаємо безліч розв'язків системи.

Зауваження.

1. Якщо ступінчаста система виявиться трикутною, тобто $k = n$, то початкова система має єдиний розв'язок. З останнього рівняння знаходимо x_n, з передостаннього рівняння x_{n-1}, далі, піднімаючись по системі вверх, знаходимо всі інші невідомі $x_{n-2},\ldots,x_1$.

2. На практиці зручно замість перетворень системи виконувати елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи, тобто приводити її до трапецієвидного вигляду. Зручно, щоб коефіцієнт a_{11} дорівнював 1 або -1 (переставляємо рядки або множимо рядок на $\dfrac{1}{a_{11}},\ a_{11} \neq 0$).

Теоретичні питання

4.1. *Яка система називається лінійною?*

4.2. *Що називається основною матрицею і розширеною матрицею системи m лінійних рівнянь з n невідомими?*

4.3. *Що називається розв'язком системи m лінійних рівнянь з n невідомими?*

4.4. *Яка система лінійних рівнянь називається сумісною і яка – несумісною?*

4.5. *Яка система лінійних рівнянь називається визначеною і яка – невизначеною?*

4.6. *Які системи називаються еквівалентними?*

4.7. *Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?*

4.8. *Які перетворення системи називають елементарними?*

4.9. *Яка система лінійних рівнянь називається невиродженою і яка – виродженою?*

4.10. *Скільки розв'язків має невироджена система?*

4.11. *Запишіть в матричному вигляді розв'язок невиродженої системи* $AX = B$.

4.12. *Запишіть формули Крамера.*

4.13. *Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.*

4.14. *В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?*

4.15. *В якому випадку система лінійних рівнянь має безліч розв'язків?*

4.16. *Яке правило розв'язання довільних лінійних систем?*

4.17. *В чому полягає метод Гауса?*

З а д а ч і   т а   в п р а в и

В задачах 4.1–4.2 розв'язати системи: а) матричним способом; б) за формулами Крамера.

4.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

4.3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \quad \times(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Отримали $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$. Так як $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несумісна. ◀

4.4. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-2)\ \times(-4)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 0\\ 0 & 5 & -8 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-1)\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 0\end{array}\right)$$

Отримали $r_A = r_{\tilde{A}} = r = 2$. Отже, система сумісна.

Кількість невідомих – $n = 3$.

Так як $r < n$, то система має безліч розв'язків.

В якості базисного мінора можна взяти, наприклад, мінор

$$M_б = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Тоді базисними будуть невідомі x_1, x_2, а x_3 – вільна.

Дана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_3 = 1,\\ \qquad 5x_2 - 8x_3 = 0.\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}x_1 - x_2 = 1 - 3x_3,\\ \qquad 5x_2 = 8x_3.\end{cases}$$

За методом Гауса знаходимо

$$\begin{cases}x_2 = \dfrac{8x_3}{5},\\ x_1 = \dfrac{8x_3}{5} - 3x_3 + 1 = \dfrac{5 - 7x_3}{5}.\end{cases}$$

Покладемо $x_3 = c,\ c \in R$, тоді множина розв'язків системи має вигляд

$$\left(\frac{5-7c}{5}; \frac{8c}{5}; c\right).$$

Перевірка:

$$\begin{cases}\dfrac{5-7c}{5}-\dfrac{8c}{5}+3c=\dfrac{5-7c-8c+15c}{5}=1,\\ 2\cdot\dfrac{5-7c}{5}+3\dfrac{8c}{5}-2c=\dfrac{10-14c+24c-10c}{5}=2,\\ 4\cdot\dfrac{5-7c}{c}+\dfrac{8c}{5}+4c=\dfrac{20-28c+8c+20c}{5}=4.\end{cases}$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}\dfrac{5-7c}{5}\\ \dfrac{8c}{5}\\ c\end{pmatrix},\ c\in R$. ◀

4.5. Розв'язати систему:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=4,\\ x_1-2x_2+2x_3=1,\\ 3x_1+x_2+3x_3=7,\\ x_1-x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-1&4\\1&-2&2&1\\3&1&3&7\\1&-1&2&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\2&3&-1&4\\3&1&3&7\\1&-1&2&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-2)\ \ \times(-3)\ \ \times(-1)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&7&-5&2\\0&7&-3&4\\0&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&1&0&1\\0&7&-3&4\\0&7&-5&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-7)\ \ \times(-7)\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&1&0&1\\0&0&-3&-3\\0&0&-5&-5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \times(-1/3)\\ \times(-1/5)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \times(-1)\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

Отримали $r_A=r_{\tilde{A}}=r=3$. Отже, система сумісна.

Кількість невідомих – $n=3$.

Так як $r=n=3$, то система має єдиний розв'язок.

Дана система еквівалентна системі: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ \qquad x_2 = 1, \\ \qquad x_3 = 1. \end{cases}$

За методом Гауса знаходимо $\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_1 = 1 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1 = 1. \end{cases}$.

Перевірка: $\begin{cases} 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 1 = 4, \\ 1 - 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1, \\ 3\cdot 1 + 1 + 3\cdot 1 = 7, \\ 1 - 1 + 2\cdot 1 = 2. \end{cases}$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ◀

4.6. Розв'язати систему методом Гауса: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Розв'язок.

Прямий хід. За допомогою елементарних перетворень зведемо розширену матрицю системи до трапецієвидного вигляду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \times(-4)\ \times(-2)\ \times(-4) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \times 1/3 \\ \times 1/5 \\ \times 1/5 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \times(-2)\ \times(-1) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Цій матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ \qquad x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad\qquad x_3 = -1. \end{cases}$$

Обернений хід. Знаходимо

$$\begin{cases} x_3 = -1, \\ x_2 = 3 + x_3 = 3 - 1 = 2, \\ x_1 = -2 + x_2 - x_3 = -2 + 2 - (-1) = 1. \end{cases}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 = 7, \\ 1 - 2 - 1 = -2, \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 11, \\ 4 \cdot 1 + 2 - (-1) = 7. \end{cases}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. ◀