Розділ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 5

§5. ВЕКТОРИ

5.1. Основні поняття

Вектор – це направлений відрізок, тобто відрізок, який має певну довжину і певний напрямок. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначають $\overrightarrow{AB}$. Часто вектор позначають однією буквою $\overline{a}$. Вектор $\overline{BA}$ називають ***протилежним*** до вектора $\overline{AB}$. Вектор протилежний до вектора $\overline{a}$ позначають $-\overline{a}$.

Довжиною або ***модулем вектора*** $\overline{AB}$ називається довжина відрізка, на якому побудований вектор, і позначається $|\overline{AB}|$ або $|\overline{a}|$.

Вектор, довжина якого рівна нулю, називається ***нульовим*** і позначається $\overline{0}$. Нульовий вектор напрямку не має.

Вектор, довжина якого рівна одиниці, називається ***одиничним*** і позначається $\overline{e}$. Одиничний вектор, напрямок якого співпадає з напрямком вектора $\overline{a}$, називається ***ортом*** вектора $\overline{a}$ і позначається $\overline{a}_0$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначають $\overline{a} \,||\, \overline{b}$. Колінеарні вектори можуть бути направлені однаково або протилежно. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

За ***кут між векторами*** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ приймають кут, величина якого не перевищує π і позначають $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$ (рис. 5.1):

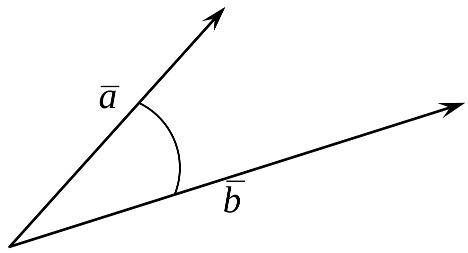

Рис. 5.1

Два вектори називаються ***ортогональними***, якщо кут між ними рівний $\pi/2$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково направлені і їх довжини рівні. Позначають $\overline{a} = \overline{b}$.

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора розміщувати в будь-якій точці простору.

Всі рівні вектори називаються ***вільним вектором.***

Три вектори в просторі називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два колінеарні, то такі вектори компланарні.

5.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами називають додавання і множення векторів на число.

Нехай $\overline{a} = \overline{AB}$ і $\overline{b} = \overline{BC}$ – два довільні вектори (рис. 5.2). Тоді вектор $\overline{c} = \overline{AC}$ називається ***сумою векторів*** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та позначається $\overline{a} + \overline{b}$. Це правило додавання векторів називають ***правилом трикутника***.

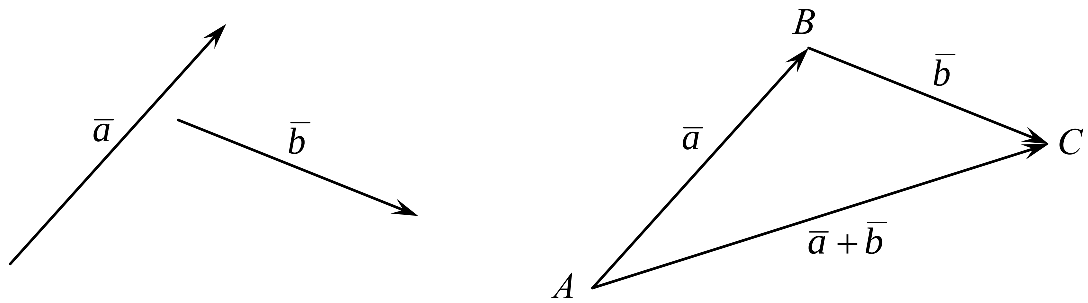

Рис. 5.2

Суму двох векторів можна знайти і за ***правилом паралелограма*** (рис. 5.3).

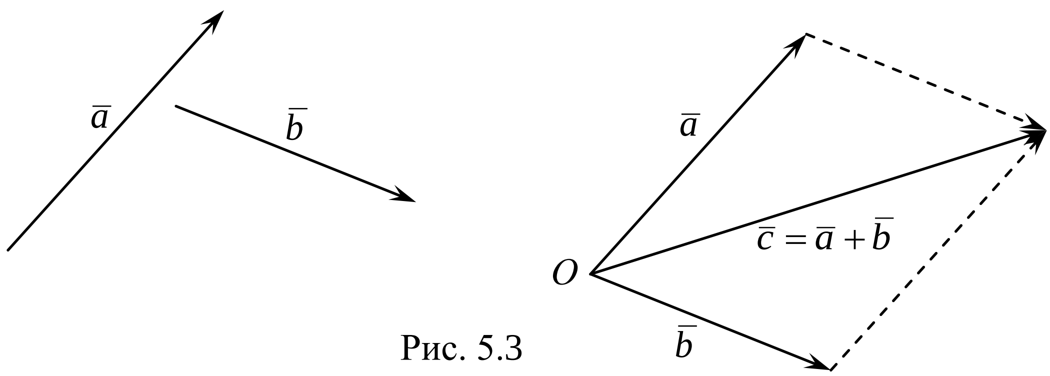

Рис. 5.3

Під сумою $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ трьох векторів розуміють вектор, отриманий послідовним додаванням даних векторів: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

Аналогічно визначається сума n векторів.

Різницею $\overline{a} - \overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор, рівний сумі векторів $\overline{a}$ і $-\overline{b}$: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$.

Відмітимо, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, одна направлена діагональ є їх сумою, а інша – різницею (рис. 5.4).

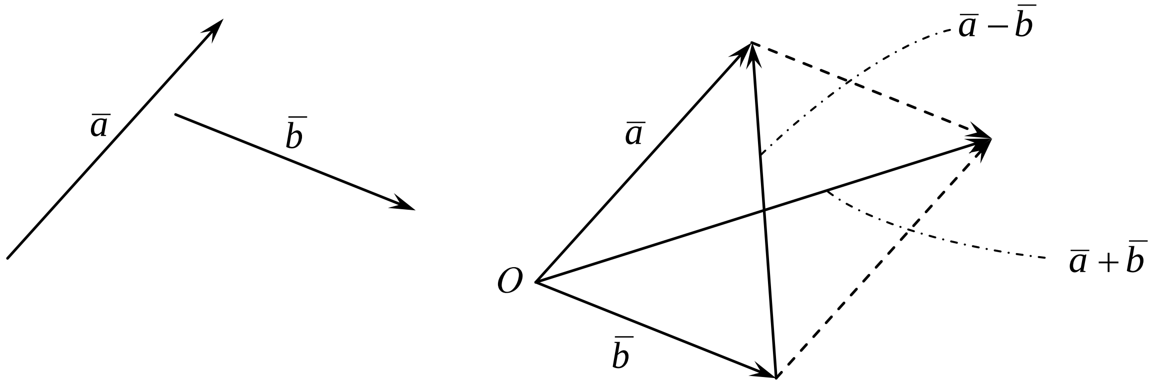

Рис. 5.4

Добутком вектора $\overline{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\overline{a}$ або $\overline{a}\lambda$, довжина якого рівна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, має напрямок вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$ і протилежно направлений, якщо $\lambda < 0$.

З означення добутку вектора на число випливають ***властивості*** цього ***добутку:***

1) якщо $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, то $\overline{a} \parallel \overline{b}$ і навпаки, якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$ $(\overline{a} \neq \overline{0})$, то при деякому λ вір-

на рівність $\bar{b} = \lambda\bar{a}$;

2) $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}_0$, тобто кожний вектор рівний добутку його модуля на орт.

Властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;
3. $\lambda_1(\lambda_2\bar{a}) = \lambda_1\lambda_2\bar{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{a}$;
5. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$.

Ці властивості дозволяють проводити перетворення в лінійних операціях над векторами так, як це робиться в алгебрі: доданки міняти місцями, вводити дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні множники.

5.3. Розклад вектора за базисом

Нехай дано вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$.

Вектор

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа,

називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – ***коефіцієнтами*** цієї комбінації.

Якщо вектор $\bar{a}$ представлений у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, тобто $\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$, то кажуть, що ***вектор*** $\bar{a}$ ***розкладений за векторами*** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$**.**

Базисом на площині назвемо два ненульових, неколінеарних вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ цієї площини, взятих в певному порядку.

Нехай на площині заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Доведемо, що будь-який вектор $\bar{a}$ цієї площини можна єдиним чином розкласти за базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Вектор $\bar{a}$ колінеарний одному з базисних векторів, наприклад, $\bar{e}_1$. Тоді за властивостями добутку вектора на число існує таке число α_1, що $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1$ або

$\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + 0\overline{e}_0$ і такий розклад єдиний.

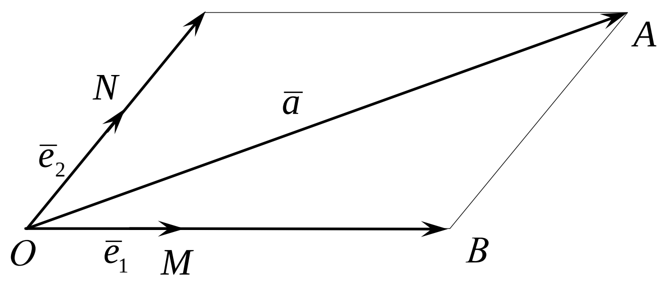

Рис. 5.5

2) Вектор $\overline{a}$ не колінеарний ні одному з базисних векторів. Зобразимо три вектори $\overline{e}_1 = \overline{OM}$, $\overline{e}_2 = \overline{ON}$, $\overline{a} = \overline{OA}$ (рис. 5.5). Очевидно, що $\overline{a} = \overline{OA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BA}$, де $\overline{OB}$ і $\overline{BA}$ колінеарні відповідно векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, а отже існують такі числа α_1 і α_2, що $\overline{OB} = \alpha_1 \overline{e}_1$, $\overline{BA} = \alpha_2 \overline{e_2}$ і

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 . \qquad (5.1)$$

Коефіцієнти α_1 і α_2 розкладу (5.1) називаються ***координатами вектора*** $\overline{a}$ ***в базисі*** $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ і записують $\overline{a}\,(\alpha_1, \alpha_2)$.

Таким чином, кожному вектору на площині в заданому базисі відповідає єдина пара чисел, взятих в певному порядку, і навпаки, кожній парі чисел, взятих в певному порядку, відповідає в заданому базисі єдиний вектор на площині.

Базисом в просторі назвемо три некомпланарних вектори, взятих в певному порядку.

Нехай в просторі заданий базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Доведемо, що будь-який вектор $\overline{a}$ можна єдиним чином розкласти за базисними векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Вектор $\overline{a}$ і два базисних вектори, наприклад, $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ компланарні. Як показано вище, $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2$ або $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + 0\overline{e}_3$.

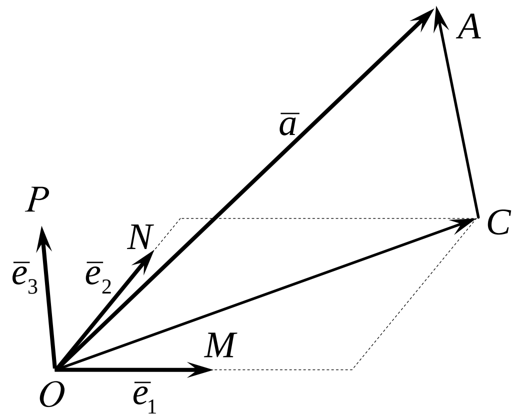

Рис. 5.6

2) Вектор $\bar{a}$ не компланарний з жодними двома з базисних векторів. Зобразимо вектори $\bar{e}_1 = \overline{OM}$, $\bar{e}_2 = \overline{ON}$, $\bar{e}_3 = \overline{OP}$, $\bar{a} = \overline{OA}$ (рис. 5.6). Очевидно, що $\bar{a} = \overline{OA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}$, де $\overline{CA}$ колінеарний $\bar{e}_3$, а $\overline{OC}$ компланарний з векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Тоді існують такі числа α_1, α_2, α_3, що вектор $\overline{CA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{CA} = \alpha_3 \bar{e}_3$, а $\overline{OC} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$. Отже

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3. \tag{5.2}$$

Коефіцієнти α_1, α_2, α_3 розкладу (5.2) називаються ***координатами вектора*** $\bar{a}$ ***в базисі*** $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і записують $\bar{a}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Таким чином, кожному вектору простору в заданому базисі відповідає єдина трійка чисел, взятих в певному порядку, і навпаки, кожній трійці чисел, взятих в певному порядку, відповідає в заданому базисі єдиний вектор.

Відмітимо, що всі координати нульового вектора рівні нулю. Якщо вектор $\bar{a} \neq 0$, то $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0$.

Базис називається ***ортонормованим,*** якщо базисні вектори одиничні і попарно ортогональні.

5.4. Лінійні операції над векторами в координатній формі

Нехай заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і вектори $\bar{a}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$, $\bar{b} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3$.

Сума векторів. Запишемо суму векторів

$$\bar{a}+\bar{b}=(\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3)+(\beta_1\bar{e}_1+\beta_2\bar{e}_2+\beta_3\bar{e}_3)$$

або, згідно властивостям лінійних операцій над векторами,

$$\bar{a}+\bar{b}=(\alpha_1+\beta_1)\bar{e}_1+(\alpha_2+\beta_2)\bar{e}_2+(\alpha_3+\beta_3)\bar{e}_3. \qquad (5.3)$$

Таким чином, при додаванні векторів їх відповідні координати додаються.

Добуток вектора на число. Помножимо вектор $\bar{a}$ на число λ:

$$\lambda\bar{a}=\lambda(\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3)$$

або

$$\lambda\bar{a}=(\lambda\alpha_1)\bar{e}_1+(\lambda\alpha_2)\bar{e}_2+(\lambda\alpha_3)\bar{e}_3. \qquad (5.4)$$

Тобто при множенні вектора на число координати вектора множаться на це число.

Приклад 5.1. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дано вектори $\bar{a}=6\bar{e}_1-2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{b}=-\bar{e}_1+4\bar{e}_2+3\bar{e}_3$. Знайти вектор $\bar{c}=5\bar{a}+2\bar{b}$.

Розв'язок. Згідно формулам (5.3), (5.4)

$$\bar{c}=5\bar{a}+2\bar{b}=5\cdot(6\overline{e_1}-2\overline{e_2}+\overline{e_3})+2\cdot(-\bar{e}_1+4\bar{e}_2+3\bar{e}_3)=$$

$$=(30-2)\bar{e}_1+(-10+8)\bar{e}_2+(5+6)\bar{e}_3=28\bar{e}_1-2\bar{e}_2+11\bar{e}_3.$$

Відповідь: $\bar{c}(28,\ -2,\ 11)$. ◄

Рівність векторів. З означення вектора як направленого відрізка, який можна переміщати в просторі паралельно самому собі, випливає, що ***два вектори*** $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\beta_1,\\ \alpha_2&=\beta_2,\\ \alpha_3&=\beta_3.\end{aligned}\right\}$$

Колінеарність векторів. Вияснимо умови колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих своїми координатами.

Так як $\bar{a}\,\|\,\bar{b}$, то за властивостями добутку вектора на число можна записати $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, де λ – деяке число, тобто

$$\bar{b}=\beta_1\bar{e}_1+\beta_2\bar{e}_2+\beta_3\bar{e}_3=\lambda\bar{a}=(\lambda\alpha_1)\bar{e}_1+(\lambda\alpha_2)\bar{e}_2+(\lambda\alpha_3)\bar{e}_3.$$

Звідси $\beta_1 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, $\beta_3 = \lambda\alpha_3$, тобто $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda$, $\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \lambda$, $\frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda$ або

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda. \tag{5.5}$$

Таким чином, *координати колінеарних векторів пропорційні*. Справедливе і обернене твердження: *вектори, що мають пропорційні координати, колінеарні*.

Зауваження. Співвідношення (5.5) умовно записуватимемо і у випадку, коли серед чисел β_1, β_2, β_3 є рівні нулю.

Нехай на площині заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і вектори $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2)$. В цьому випадку мають місце формули, аналогічні формулам (5.3) – (5.5).

Приклад 5.2. Перевірити, чи колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, задані в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

а) $\bar{a}(2,\ -3,\ 1)$, $\bar{b}(-4,\ 6,\ -2)$; б) $\bar{a}(4,\ 0,\ 5)$, $\bar{b}(-4,\ 0,\ -5)$.

Розв'язок. Згідно формули (5.5):

а) $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{-2}{1} = -2$, а отже $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

б) $\frac{4}{-4} = \frac{0}{0} = \frac{5}{-5}$.

Так як друга координата в обох векторів рівна нулю, то їх можна розглядати як вектори, задані на площині в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_3$, а отже $\frac{4}{-4} = \frac{5}{-5} = -1$ і $\bar{a} \parallel \bar{b}$. ◄

Приклад 5.3. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ дано вектори $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$. Показати, що вектори $\bar{a}, \bar{b}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\bar{c} = 6\bar{e}_1 + 19\bar{e}_2$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}$.

Розв'язок. Якщо два вектори утворюють базис, то вони неколінеарні. Згідно формули (5.5):

$$\frac{2}{1} \neq -\frac{1}{5},$$

а отже вектори $\bar{a}, \bar{b}$ неколінеарні і утворюють базис.

В новому базисі $\bar{a}, \bar{b}$ вектор $\bar{c}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{c} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b},$$

де коефіцієнти α_1, α_2 – невідомі і є координатами вектора $\bar{c}$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\bar{c}$ в координатній формі:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 19 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 19 &= -\alpha_1 + 5\alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

Розв’яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 10 + 1 = 11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - 19 \cdot 1 = 30 - 19 = 11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 19 \end{vmatrix} = 2 \cdot 19 - (-1) \cdot 6 = 38 + 6 = 44.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \dfrac{11}{11} = 1$; $\alpha_2 = \dfrac{44}{11} = 4$.

Відповідь: $\bar{c}(1,\ 4)$. ◀

Приклад 5.4. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дано вектори $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{b} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{c} = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$. Показати, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\bar{d} = \bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Розв’язок. Якщо три вектори утворюють базис, то жоден з них не є лінійною комбінацією двох інших. Тоді визначник, складений з координат цих векторів, відмінний від нуля, так як лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх координатами. Обчислимо цей визначник:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$1 + 2 - 1 = 2 \neq 0.$$

Отже, вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис.

В новому базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ вектор $\bar{d}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{d} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c},$$

де коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – невідомі і є координатами вектора $\bar{d}$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\bar{d}$ в координатній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3, \\ 8 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ -5 &= 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3. \end{aligned} \right\}$$

Розв’яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Очевидно, що визначник $\Delta = \det$ як визначник транспонованої матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Обчислимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot(-5) + 8\cdot 1\cdot 0 - (-5)\cdot(-1)\cdot 0 - 8\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= 1 - 10 + 16 - 1 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot(-5)\cdot 0 - 0\cdot 8\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(-1) - (-5)\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= -8 + 1 + 5 = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-5) + 2\cdot 8\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-5) - 1\cdot 8\cdot 1 =$$

$$= 5 + 1 + 10 - 8 = 8.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \dfrac{6}{2} = 3$; $\alpha_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$; $\alpha_3 = \dfrac{8}{2} = 4$.

Відповідь: $\bar{d}(3, -1, 4)$. ◄

5.5. Декартова прямокутна система координат

Нехай в просторі дано точку O і ортонормований базис, який позначатимемо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Сукупність точки O і ортонормованого базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ називається ***декартовою прямокутною системою координат в просторі.*** Точку O називають *початком координат*. Вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{i}$, називається віссю Ox або *віссю абсцис*; вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{j}$ – віссю Oy або *віссю ординат*; вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{k}$ – віссю Oz або *віссю аплікат.* Осі Ox, Oy, Oz називають *осями координат*. Площини, що проходять через дві осі координат, називають *координатними площинами*.

Декартову прямокутну систему координат позначають $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ або $Oxyz$.

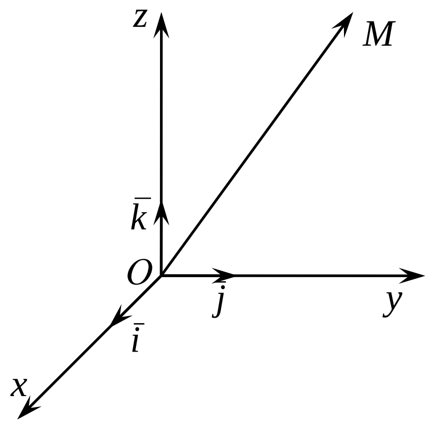

Рис. 5.7

Радіус-вектором точки M назвемо вектор $\overline{OM}$ (рис. 5.7). Нехай $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, де (x, y, z) – координати вектора $\overline{OM}$ в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, тобто його проекції на відповідні координатні осі, їх називають ***координатами точки M*** в системі $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ і записують $M(x, y, z)$. Координата x називається абсцисою, y – ординатою, z – аплікатою.

Таким чином, кожній точці M в заданій декартовій прямокутній системі координат в просторі відповідає єдина впорядкована трійка чисел, і навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел в заданій декартовій прямокутній системі координат в просторі відповідає єдина точка.

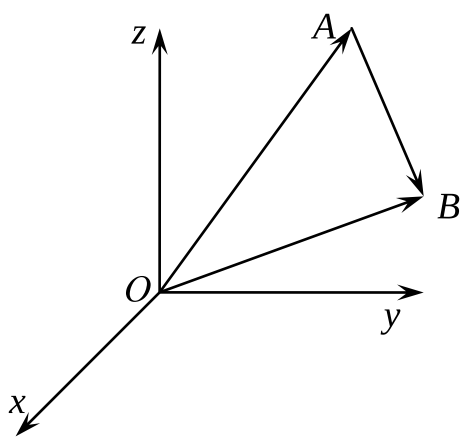

Рис. 5.8

Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Маємо (рис. 5.8):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) - (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Отже, ***координати вектора*** $\overline{AB}$ рівні різницям відповідних координат його кінця і початку.

Три некомпланарних вектори $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, взятих у вказаному порядку, утворюють *праву орієнтацію* або ***праву трійку***, якщо з кінця $\overline{AD}$ пово-

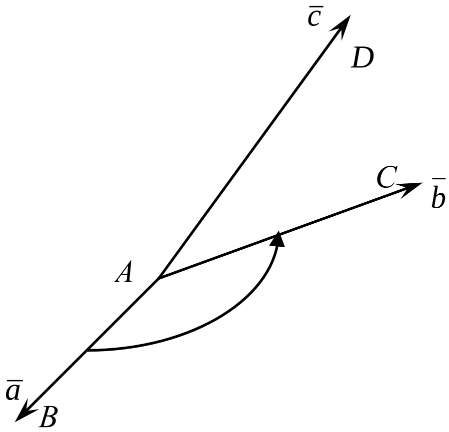

Рис. 5.9

рот від $\overline{AB}$ до $\overline{AC}$ по найкоротшому шляху видно проти ходу стрілки годинника (рис. 5.9). В протилежному випадку трійка векторів утворює ***ліву трійку***.

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву (ліву) трійку, то, помінявши місцями довільні два вектори, отримаємо ліву (праву) трійку.

Система координат називається ***правою***, якщо її базисні вектори утворюють праву трійку і лівою, якщо – ліву.

Аналогічно визначається декартова прямокутна система координат на площині.

5.6. Поділ відрізка в даному відношенні

Розділити відрізок AB у відношенні λ $(\lambda \neq -1)$ означає на прямій, що проходить через точки *A* і *B*, знайти таку точку *C*, що $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Якщо $\lambda > 0$, то точка *C* лежить на відрізку AB, якщо $\lambda < 0$, то точка *C* лежить за межами відрізка

AB.

Нехай в системі координат $Oxyz$ дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо на прямій AB координати точки $C(x, y, z)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ.

Розглянемо вектори $\overline{AC}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{CB}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. Так як $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$, то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. З цих рівностей отримаємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (5.6)$$

Зокрема, при $\lambda = 1$ маємо ***координати середини відрізка***:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (5.7)$$

Аналогічно, якщо на площині дано точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то координати точки $C(x, y)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ, визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

а координати середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Приклад 5.5. Точка $C(2,\ 0,\ 4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{4}$. Знайти координати точки *B*, якщо $A(3, -1, 5)$.

Розв'язок. Позначимо невідомі координати $B(x_B, y_B, z_B)$. Згідно формулам (5.6)

$$2 = \frac{3 + \frac{1}{4}x_B}{1 + \frac{1}{4}}; \quad 0 = \frac{-1 + \frac{1}{4}y_B}{1 + \frac{1}{4}}; \quad 4 = \frac{5 + \frac{1}{4}z_B}{1 + \frac{1}{4}},$$

звідки $x_B = -2$; $y_B = 4$; $z_B = 0$. Відповідь: $B(-2,\ 4,\ 0)$. ◀

Приклад 5.6. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(3,2)$, $B(-1,6)$, $C(-2,3)$, $D(2,-1)$ є паралелограмом.

Розв'язок. За ознакою паралелограма його діагоналі точкою перетину діляться пополам. Знайдемо координати середин відрізків AC і BD і якщо вони співпадуть, то чотирикутник – паралелограм.

Позначимо середину відрізка AC через O_1 а середину відрізка BD – через O_2. Тоді

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2};\ \ y_{O_1} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2};$$

$$x_{O_2} = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2};\ \ y_{O_2} = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Очевидно, що точка O_1 співпадає з точкою O_2, отже чотирикутник є паралелограмом. ◀

Теоретичні питання

5.1. *Які два вектори називаються колінеарними?*

5.2. *Які два вектори називаються рівними?*

5.3. *Які вектори називаються вільними?*

5.4. *Які вектори називаються компланарними?*

5.5. *Що називається вектором?*

5.6. *Який вектор називається ортом?*

5.7. *Які операції над векторами називають лінійними?*

5.8. *Які властивості лінійних операцій над векторами?*

5.9. *Що називається лінійною комбінацією векторів?*

5.10. *Що називається базисом на площині*?

5.11. *Що називається базисом в просторі*?

5.12. *Що називається координатами вектора* $\bar{a}$ *в базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$?

5.13. *Який базис називається ортонормованим?*

5.14. *Чому рівні координати суми векторів в даному базисі?*

5.15. *Як визначаються координати при множенні вектора на число в даному базисі?*

5.16. *Яка умова колінеарності двох ненульових векторів?*

5.17. *Що називається декартовою прямокутною системою координат в просторі?*

5.18. *Що називається координатами точки М в системі* $Oxyz$ *?*

5.19. *Як визначаються координати вектора* $\overline{AB}$ *в системі* $Oxyz$ *?*

5.20. *Які три вектори утворюють праву трійку, а які – ліву?*

5.21. *Що означає розділити відрізок* AB *у відношенні* λ $(\lambda \neq -1)$ *?*

5.22. *Чому рівні координати точки* C*, що ділить відрізок* AB *у відношенні* λ *?*

5.23. *Чому рівні координати середини відрізка?*

Задачі та вправи

5.1. *В базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$. *Знайти вектор* $\bar{c} = 4\bar{a} - 6\bar{b}$.

5.2. *Перевірити, чи колінеарні вектори* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$*, задані в базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$*:*

а) $\bar{a}(-1,\ 4,\ 1)$, $\bar{b}(2,\ -8,\ -2)$;

б) $\bar{a}(0,\ 1,\ -6)$, $\bar{b}(0,\ -3,\ 18)$;

в) $\bar{a}(5,\ 4,\ 0)$, $\bar{b}(-5,\ -4,\ 1)$.

5.3. *В базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. *Перевірити чи утворюють вони базис:*

а) $\bar{a}(2,\ 0,\ -3)$, $\bar{b}(1,\ 1,\ -2)$, $\bar{c}(-4,\ 6,\ 1)$;

б) $\bar{a}(2,\ 4,\ -1)$, $\bar{b}(-5,\ 2,\ 1)$, $\bar{c}(-2,\ -4,\ 1)$.

5.4. *В базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a} = 7\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{b} = -2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{c} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. *Показати, що вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *утворюють базис, і знайти координати вектора* $\bar{d} = -3\bar{e}_1 + 14\bar{e}_2 + 10\bar{e}_3$ *в базисі* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

5.5. *Точка* $C(-5, 3, 0)$ *ділить відрізок* AB *у відношенні* $\lambda = \dfrac{1}{3}$. *Знайти координати точки А, якщо* $B(2, -8, 1)$.

5.6. *Дано точки* $A(-1, 2, 1)$, $B(2, 1, -3)$, $C(3, 0, 5)$. *Підібрати координати точки* D *так, щоб чотирикутник* $ABCD$ *був паралелограмом.*

Лекція 6

§6. ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

6.1. Скалярний добуток векторів

Означення скалярного добутку. ***Скалярним добутком*** двох ненульових векторів $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо хоча б один із двох даних векторів нульовий, то їх скалярний добуток за означенням вважається рівним нулю.

Позначається $\bar{a}\cdot\bar{b}$ або $\bar{a}\bar{b}$, або $(\bar{a},\bar{b})$. Таким чином, за означенням,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{6.1}$$

де $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

Оскільки $|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=np_{\bar{a}}\bar{b}$ є проекцією вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$, а $|\bar{a}|\cdot\cos\varphi=np_{\bar{b}}\bar{a}$ – проекцією вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, то формулі (6.1) можна надати іншого вигляду:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}, \tag{6.2}$$

тобто скалярний добуток рівний добутку довжини одного з них на проекцію іншого на перший вектор.

Властивості скалярного добутку.

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Д о в е д е н н я. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\lambda\bar{a}=\lambda|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

Д о в е д е н н я.

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot(np_{\bar{a}}\bar{b}+np_{\bar{a}}\bar{c})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}+|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

4. Скалярний квадрат вектора рівний квадрату його довжини:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2.$$

Д о в е д е н н я . $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos 0^o=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot 1=|\overline{a}|^2$.

Зокрема, $\overline{i}^{\,2}=\overline{j}^{\,2}=\overline{k}^{\,2}=1$.

Якщо добути корінь із скалярного квадрата вектора, то отримаємо не початковий вектор, а його модуль $|\overline{a}|$, тобто $\sqrt{\overline{a}^{\,2}}=|\overline{a}|$.

5. Якщо ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ортогональні, то їх скалярний добуток рівний нулю і навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів рівний нулю, то ці вектори ортогональні.

Д о в е д е н н я. Так як $\varphi=(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\pi/2$, то $\cos\varphi=\cos\pi/2=0$, а отже і $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Якщо $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ і $|\overline{a}|\neq 0$, $|\overline{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0$ і $\varphi=\pi/2$.

Зокрема, $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{i}=0$.

Приклад 6.1. Знайти $\overline{a}\cdot\overline{b}$, якщо $\overline{a}=3\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$, $|\overline{m}|=4$, $|\overline{n}|=6$,

$$\varphi=(\widehat{\overline{m},\overline{n}})=\pi/4.$$

Розв'язок. $\overline{a}\cdot\overline{b}=(3\overline{m}+2\overline{n})\cdot(\overline{m}-\overline{n})=3\overline{m}^2-3\overline{m}\overline{n}+2\overline{n}\overline{m}-2\overline{n}^2=3\overline{m}^2-\overline{m}\overline{n}-2\overline{n}^2=$

$$=3\cdot 4^2-4\cdot 6\cdot\cos\pi/4-2\cdot 6^2=3\cdot 16-4\cdot 6\cdot\sqrt{2}/2-2\cdot 36=48-12\sqrt{2}-72=$$

$$-24-12\sqrt{2}.\ ◀$$

Приклад 6.2. Знайти довжину вектора $\overline{c}=4\overline{a}-\overline{b}$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=7$,

$$\varphi=(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\pi/3.$$

Розв'язок. $|\overline{c}|=\sqrt{\overline{c}^{\,2}}=\sqrt{(4\overline{a}-\overline{b})^2}=\sqrt{(4\overline{a}-\overline{b})\cdot(4\overline{a}-\overline{b})}=\sqrt{16\overline{a}^{\,2}-2\cdot 4\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}^{\,2}}=$

$$=\sqrt{16\cdot 3^2-8\cdot 3\cdot 7\cdot\cos\pi/3+7^2}=\sqrt{16\cdot 9-8\cdot 3\cdot 7\cdot 1/2+49}=\sqrt{144-84+49}=\sqrt{109}.\ ◀$$

Скалярний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\overline{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\overline{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ або, що те ж саме, $\overline{a}=\alpha_1\overline{i}+\alpha_2\overline{j}+\alpha_3\overline{k}$, $\overline{b}=\beta_1\overline{i}+\beta_2\overline{j}+\beta_3\overline{k}$.

Знайдемо скалярний добуток цих векторів, перемноживши їх як многочлени згідно властивостей 1 – 3:

$$\bar a\cdot\bar b=(\alpha_1\bar i+\alpha_2\bar j+\alpha_3\bar k)\cdot(\beta_1\bar i+\beta_2\bar j+\beta_3\bar k)=\alpha_1\beta_1(\bar i\bar i)+\alpha_1\beta_2(\bar i\bar j)+\alpha_1\beta_3(\bar i\bar k)+$$

$$+\alpha_2\beta_1(\bar j\bar i)+\alpha_2\beta_2(\bar j\bar j)+\alpha_2\beta_3(\bar j\bar k)+\alpha_3\beta_1(\bar k\bar i)+\alpha_3\beta_2(\bar k\bar j)+\alpha_3\beta_3(\bar k\bar k).$$

Згідно властивостям 4, 5, отримаємо:

$$\bar a\cdot\bar b=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3. \qquad (6.3)$$

Таким чином, скалярний добуток векторів рівний сумі добутків їх однойменних координат.

За формулою (6.3) маємо

$$\bar a\cdot\bar a=\bar a^2=|\bar a|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^3, \qquad (6.4)$$

звідки

$$|\bar a|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}. \qquad (6.5)$$

Приклад 6.3. Знайти довжину вектора $\bar a=6\bar i-2\bar j+3\bar k$.

Розв'язок. $|\bar a|=\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7.$ ◀

Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Відстань між двома точками M_1 і M_2 рівна

$$|M_1M_2|=|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (6.6)$$

Так як $\bar a\cdot\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\cos\varphi$, то ***кут між ненульовими векторами*** $\bar a$ і $\bar b$ визначається за формулами:

$$\cos\varphi=\frac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|},$$

тобто

$$\cos\varphi=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}. \qquad (6.7)$$

З останньої формули випливає ***умова перпендикулярності ненульових векторів*** $\bar a$ і $\bar b$:

$$\bar a\cdot\bar b=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0. \qquad (6.8)$$

Нехай кути, які утворює вектор $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ з осями координат Ox, Oy, Oz, відповідно рівні α, β, γ. Тоді проекції вектора $\bar{a}$ на осі координат рівні

$$\alpha_1 = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad \alpha_2 = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad \alpha_3 = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{6.9}$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{\alpha_1}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\alpha_2}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\alpha_3}{|\bar{a}|}. \tag{6.10}$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Підставивши вирази (6.9) в рівність (6.4), отримаємо

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Скоротивши на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, отримаємо співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 6.4. Довести, що діагоналі чотирикутника, заданого координатами вершин $A(-4, -4, 4)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(2, 5, 1)$, $D(3, -2, 2)$, взаємно перпендикулярні.

Розв'язок. Складемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$, що лежать на діагоналях даного чотирикутника:

$$\overline{AC} = (2-(-4), 5-(-4), 1-4) = (6, 9, -3); \quad \overline{BD} = (3-(-3), -2-2, 2-2) = (6, -4, 0).$$

Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Згідно властивості 5, вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ перпендикулярні, що й треба було довести. ◀

Приклад 6.5. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-1, 1, 3)$, $B(3, 3, -4)$, $C(2, 1, -1)$. Знайти проекцію сторони AB на сторону AC.

Розв'язок. Складемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, що лежать на сторонах трикутника:

$$\overline{AB} = (3-(-1), 3-1, -4-3) = (4, 2, -7); \quad \overline{AC} = (2-(-1), 1-1, -1-3) = (3, 0, -4).$$

З формули (6.2) знаходимо

$$np_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-7) \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{12 + 0 + 28}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{40}{5} = 8. \ ◀$$

Приклад 6.6. Знайти кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $\overline{AB}(4, 2, -7)$, $\overline{AC}(3, 0, -4)$.

Розв'язок. За формулою (6.7) знаходимо

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 3 + 2\cdot 0 + (-7)\cdot(-4)}{\sqrt{4^2+2^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}} = \frac{12+28}{\sqrt{16+4+49}\cdot\sqrt{9+0+16}} =$$

$$= \frac{40}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{25}} = \frac{40}{5\sqrt{69}} = \frac{8}{\sqrt{69}},$$

$\varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{69}}$. ◀

Приклад 6.7. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(3, 4, -5)$, $B(-1, 8, -3)$.

Розв'язок. Знайдемо координати і довжину вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = (-1-3, 8-4, -3-(-5)) = (-4, 4, 2),$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2+4^2+2^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6.$$

За формулами (6.10)

$$\cos\alpha = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3},\ \ \cos\beta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ \ \cos\gamma = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

6.2. Векторний добуток векторів

Означення векторного добутку. ***Векторним добутком*** двох неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, такий, що:

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$ і $\bar{c}\perp\bar{b}$, тобто $\bar{c}$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

2) направлений так, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку;

3) має довжину**,** що дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними, тобто $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, то їх векторний добуток за означенням вважається рівним нульовому вектору.

Векторний добуток позначається $[\bar{a},\bar{b}]$.

Геометричний зміст векторного добутку. Модуль векторного добутку $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 6.1).

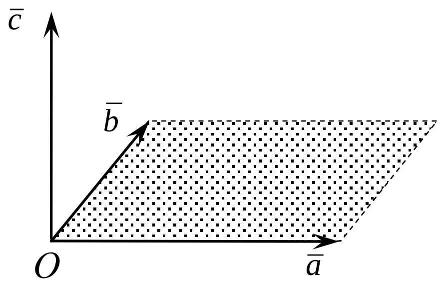

Рис. 6.1

Властивості векторного добутку.

1. $[\overline{a},\overline{b}] = -\ [\overline{b},\overline{a}]$.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. $[\lambda\overline{a},\overline{b}] = \lambda[\overline{a},\overline{b}]$.

Д о в е д е н н я . Нехай $\lambda > 0$. Вектор $[\lambda\overline{a},\overline{b}]$ перпендикулярний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (вектори $\lambda\overline{a}$ і $\overline{a}$ лежать в одній площині). Вектор $\lambda[\overline{a},\overline{b}]$ також перпендикулярний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Отже, вектори $[\lambda\overline{a},\overline{b}]$ і $\lambda[\overline{a},\overline{b}]$ колінеарні. Очевидно, що їх напрямки співпадають. Вони мають однакову довжину:

$$\left|[\lambda\overline{a},\overline{b}]\right| = \left|\lambda\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = \lambda\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi \text{ і } \left|\lambda[\overline{a},\overline{b}]\right| = \lambda\ \left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = \lambda\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi.$$

Тому $[\lambda\overline{a},\overline{b}] = \lambda[\overline{a},\overline{b}]$. Аналогічно доведення при $\lambda < 0$.

3. $[\overline{a},\overline{b}+\overline{c}] = [\overline{a},\overline{b}] + [\overline{a},\overline{c}]$.

Приймемо без доведення.

4. Два ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток рівний нульовому вектору, тобто $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$.

Д о в е д е н н я . Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то вектор $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$ за означенням.

Якщо $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$, то $\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = 0$. Тоді $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, тобто $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Приклад 6.8. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 4$, $\left|\overline{n}\right| = 6$, $\varphi = (\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = \pi/4$.

Розв'язок. Використовуючи властивості векторного добутку, отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=[3\bar{m}+2\bar{n},\bar{m}-\bar{n}]=3[\bar{m},\bar{m}]-3[\bar{m},\bar{n}]+2[\bar{n},\bar{m}]-2[\bar{n},\bar{n}]=$$

$$=3\cdot\bar{0}-3[\bar{m},\bar{n}]-2[\bar{m},\bar{n}]-2\cdot\bar{0}=-5[\bar{m},\bar{n}].$$

Тоді за означенням

$\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|=\left|-5[\bar{m},\bar{n}]\right|=|-5|\cdot\left|[\bar{m},\bar{n}]\right|=5\cdot 4\cdot 6\cdot\sin\pi/4=5\cdot 4\cdot 6\cdot\sqrt{2}/2=60\sqrt{2}$. ◀

Векторний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a}=\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}$, $\bar{b}=\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}$.

Знайдемо векторний добуток цих векторів, перемноживши їх згідно властивостям 1–3:

$$[\bar{a},\bar{b}]=[\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k},\ \beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}]=\alpha_1\beta_1[\bar{i},\bar{i}]+\alpha_1\beta_2[\bar{i},\bar{j}]+\alpha_1\beta_3[\bar{i},\bar{k}]+$$

$$+\alpha_2\beta_1[\bar{j},\bar{i}]+\alpha_2\beta_2[\bar{j},\bar{j}]+\alpha_2\beta_3[\bar{j},\bar{k}]+\alpha_3\beta_1[\bar{k},\bar{i}]+\alpha_3\beta_2[\bar{k},\bar{j}]+\alpha_3\beta_3[\bar{k},\bar{k}]. \quad (6.11)$$

Векторні добутки $[\bar{i},\bar{i}]$, $[\bar{j},\bar{j}]$, $[\bar{k},\bar{k}]$, що входять в цю рівність, рівні нульовому вектору згідно властивості 4.

Векторний добуток $[\bar{i},\bar{j}]$ є вектором, модуль якого рівний $|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin\pi/2=1\cdot 1\cdot 1=1$ і колінеарний та однаково направлений з вектором $\bar{k}$, а отже $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$. Аналогічно $[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}$ (рис. 6.2). Згідно властивості 1

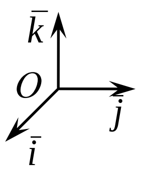

Рис. 6.2

$[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k}$, $[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i}$, $[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}$.

Підставивши знайдені добутки в (6.11), отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\alpha_1\beta_2\bar{k}-\alpha_1\beta_3\bar{j}-\alpha_2\beta_1\bar{k}+\alpha_2\beta_3\bar{i}+\alpha_3\beta_1\bar{j}-\alpha_3\beta_2\bar{i}=$$

$$=\bar{i}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)-\bar{j}(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+\bar{k}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Цю рівність символічно можна записати у вигляді

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

Приклад 6.9. Знайти $[\bar{a},\bar{b}]$, якщо $\bar{a} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$.

Розв'язок. Згідно (6.12) отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 13\bar{i} - 11\bar{j} - 8\bar{k}. \blacktriangleleft$$

Приклад 6.10. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(-1,1,5)$, $B(2,3,-4)$, $C(0,-6,-2)$.

Розв'язок. Очевидно (рис. 6.2), що $S_{\Delta ABC} = 1/2 \cdot \left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right|$. Так як $\overline{AB}(3,2,-9)$,

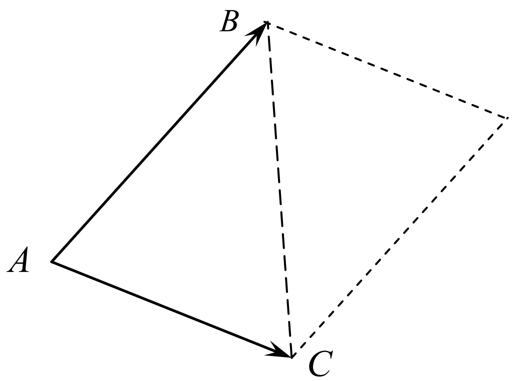

Рис. 6.2

$\overline{AC}(1,-7,-7)$, то

$$[\overline{AB},\overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & -9 \\ 1 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -77\bar{i} + 12\bar{j} - 23\bar{k},$$

$$\left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right| = \sqrt{(-77)^2 + 12^2 + (-23)^2} = \sqrt{6602}.$$

Отже, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{6602}/2$. ◀

6.3. Мішаний добуток векторів

Означення мішаного добутку. ***Мішаним добутком*** трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається число, отримане наступним чином: векторний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$ множимо скалярно на вектор $\bar{c}$.

Мішаний добуток позначається $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Отже, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$.

Геометричний зміст мішаного добутку. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис 6.3).

Маємо:

$$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \bar{d} \cdot \bar{c} = \left|\bar{d}\right| \cdot \text{пр}_{\bar{d}} \bar{c}, \quad \left|\bar{d}\right| = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = S,$$

де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$;
$\text{пр}_{\bar{d}} \bar{c} = H$ для правої трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\text{пр}_{\bar{d}} \bar{c} = -H$ для лівої трійки, де H – висота паралелепіпеда.

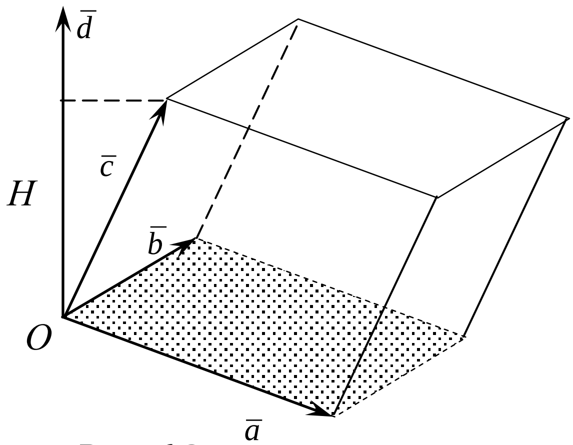

Рис. 6.3

Отримуємо

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = S \cdot (\pm H),$$

тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \pm V,$$

де V – об’єм паралелепіпеда, утвореного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Таким чином, модуль мішаного добутку трьох некомпланарних векторів чисельно рівний об’єму паралелепіпеда, ребрами якого є ці вектори: $\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right| = V$.

Властивості мішаного добутку.

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його множників: $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = ([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a}) = ([\bar{c}, \bar{a}], \bar{b})$.

Тому не змінюється ні об’єм паралелепіпеда, ні орієнтація векторів.

2. $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})=(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

Доведення. Так як за властивістю 1 $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})=([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})$ і скалярний добуток $([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})$ не зміниться при перестановці векторів, тобто $([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})=(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$, то $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})=(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

3. $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})$, $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})$, $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$**.**

Дійсно**,** при перестановці довільних двох векторів, враховуючи властивості 1, 2, переставляються множники векторного добутку, тому знак змінюється на протилежний.

4. Три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток рівний нулю.

Доведення. Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні, то вектор $\bar{d}=[\bar{a},\bar{b}]$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, а отже $\bar{d}\perp\bar{c}$, тому $\bar{d}\cdot\bar{c}=0$, тобто $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$.

Якщо $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$ і вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – ненульові, то або вектор $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$, а отже $\bar{a}\,||\,\bar{b}$ і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні, або $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{d}\perp\bar{c}$, а отже $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні.

Мішаний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{c}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a}=\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}$, $\bar{b}=\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}$, $\bar{c}=\gamma_1\bar{i}+\gamma_2\bar{j}+\gamma_3\bar{k}$.

Так як згідно (6.12)

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix},$$

то скалярний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$ на $\bar{c}$ рівний

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\gamma_1-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}\gamma_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\gamma_3.$$

Отриману формулу можна записати у вигляді

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \qquad (6.13)$$

Приклад 6.11. Виявнити, яка орієнтація трійки векторів $\bar{a} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = -4\bar{i} + \bar{j}$.

Розв'язок. Згідно (6.13)

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 13 - 11 + 0 = -63 < 0,$$

тому вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ мають ліву орієнтацію. ◀

Приклад 6.12. Перевірити, чи компланарні вектори $\bar{a} = 5\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = 9\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}$.

Розв'язок. Так як

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 40 + 9 - 108 + 25 + 4 = 0,$$

то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні. ◀

Приклад 6.13. Знайти об'єм піраміди $ABCD$, якщо $A(1, 0, 4)$, $B(2, 7, 3)$, $C(4, 0, -1)$, $D(2, 8, -1)$.

Розв'язок. Знайдемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (2-1, 7-0, 3-4) = (1, 7, -1), \qquad \overline{AC} = (4-1, 0-0, -1-4) = (3, 0, -5),$$

$$\overline{AD} = (2-1, 8-0, -1-4) = (1, 8, -5).$$

Відомо, що $V_{ABCD} = \frac{1}{6}V$, де V – об'єм паралелепіпеда, ребрами якого є вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Отже

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 7 & -1\\ 3 & 0 & -5\\ 1 & 8 & -5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|0-24-35+0+105+40\right|=$$

$$=\frac{96}{6}=16 \text{ (куб. од.)} \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

6.1. *Що називається скалярним добутком двох векторів?*

6.2. *Як виражається скалярний добуток через проекції одного вектора на інший?*

6.3. *Які властивості скалярного добутку?*

6.4. *Як виражається скалярний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?*

6.5. *Як виражається довжина вектора через його координати?*

6.6. *Як виражається відстань між двома точками через їх координати?*

6.7. *Чому рівний кут між двома ненульовими векторами?*

6.8. *Яка умова ортогональності двох векторів?*

6.9. *Що називається напрямними косинусами вектора?*

6.10. *Що називається векторним добутком двох векторів?*

6.11. *Який геометричний зміст векторного добутку?*

6.12. *Які властивості векторного добутку?*

6.13. *Як виражається векторний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?*

6.14. *Що називається мішаним добутком трьох векторів?*

6.15. *Який геометричний зміст мішаного добутку?*

6.16. *Які властивості мішаного добутку?*

6.17. *Як виражається мішаний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?*

Задачі та вправи

6.1. *Знайти* $\bar{a}\cdot\bar{b}$, *якщо* $\bar{a}=2\bar{m}+\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{m}-3\bar{n}$, $|\bar{m}|=4$, $|\bar{n}|=2$, $\varphi=(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\pi/3$.

6.2. *Дано трикутник з вершинами в точках* $A(-1,3,5)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,2,1)$. *Знайти проекцію сторони* AC *на сторону* AB.

6.3. *Знайти кут між векторами* $\overline{AB}$ *і* $\overline{AC}$, *якщо* $A(-1,3,5)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,2,1)$.

6.4. *Знайти* $(4\bar{a}-\bar{b})^2$, *якщо* $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=2$, $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\pi/4$.

6.5. *Знайти напрямні косинуси вектора* $\bar{a}(12,3,-4)$.

6.6. *Знайти* $|[\bar{a},\bar{b}]|$, *якщо* $\bar{a}=\bar{m}+2\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, $|\bar{m}|=2$, $|\bar{n}|=8$, $\varphi=(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\pi/6$.

6.7. *Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах* $\bar{a}(2,3,-1)$ *і* $\bar{b}(1,-1.1)$.

6.8. *Знайти мішаний добуток векторів* $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=-\bar{i}+\bar{k}$. *Вияснити, яка орієнтація трійки векторів* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

6.9. *Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\bar{a}=3\bar{i}+6\bar{j}-8\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+4\bar{i}+\bar{k}$, $\bar{c}=5\bar{i}+2\bar{i}-\bar{k}$.

6.10. *Перевірити, чи лежать точки* A, B, C, D *в одній площині:*

а) $A(0,2,-1)$, $B(3,1,1)$, $C(2,-1,0)$, $D(-4,1,2)$;

б) $A(5,5,4)$, $B(3,8,4)$, $C(3,5,10)$, $D(5,8,2)$.