МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ ДРУКАРСТВА

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

Методичні вказівки до розв'язування задач та індивідуальні домашні завдання з вищої математики
Ряди

для студентів інженерних та технологічних спеціальностей

Львів 2007

Затверджено кафедрою математики і фізики Української академії друкарства, протокол №5 від 26 березня 2007року .

Уклав: Пирч Назар Михайлович

Відповідальний за випуск: Пушак Я.С.

Короткий виклад роботи

Дані методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач та завдання для самостійної роботи з вищої математики по темі "Ряди", зокрема акцентується увага на таких темах як дослідження збіжності числових рядів, знаходження області збіжності степеневих рядів, застосування рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів, розв'язування диференціальних рівнянь, розвинення функцій у ряди Тейлора та тригонометричні ряди Фур'є.

Для студентів інженерних та технологічних спеціальностей.

Підписано до друку

Вступ.

Поняття числового ряду належить до фундаментальних понять математичного аналізу. Числові ряди сьогодні знаходять своє місце у фізиці, економіці, обчислювальній математиці. Більшість математичних пакетів і обчислювальних програм використовують у своїй програмній ідеології ряди для розв’язування різного роду задач, які виникають в практичному житті. Знання основ теорії рядів тут потрібні для того, щоб вміти поставити коректну задачу і правильно оцінити час, який потрібен на її виконання

Методичні вказівки містить основні теоретичні відомості, приклади розв’язання типових задач та завдання для самостійної роботи з вищої математики по темі “Ряди“. Зокрема, акцентується увага на таких темах як дослідження збіжності числових рядів, знаходження області збіжності степеневих рядів, застосування рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів, розв’язування диференціальних рівнянь, розвинення функцій у ряди Тейлора та тригонометричні ряди Фур’є.

1. Числові ряди.

Нехай задано числову послідовність $\{a_n\}$, $n \geq 1$. Вираз $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається числовим рядом, а числа $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ називаються членами ряду. Для кожного натурального n покладемо $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Якщо існує скінченна границя $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним. Число S_n називається n-ою частковою сумою ряду, а число S − його сумою і позначається $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Якщо послідовність $\{S_n\}$ не має скінченної границі, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається розбіжним. Різниця $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ називається залишком ряду. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ для якого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, називається умовно збіжним.

<u>*Приклад 1.*</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Розв’язання. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$ **;** $S_2 = a_1 + a_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$ **; ......**

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Знайдемо границю послідовності часткових сум даного ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Отже, даний ряд є збіжний, а його сума дорівнює 1.

Необхідна умова збіжності числового ряду. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>*Приклад 2.*</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{6n-1}$.

Розв’язання. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{6n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 + 1/n}{6 - 1/n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq 0$, то даний ряд є розбіжний.

Перша ознака порівняння. Нехай $0 \le a_n \le b_n$ для всіх натуральних n. Тоді зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Еталоном під час застосування ознаки порівняння часто служать ряди вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$. Нагадаємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$ є збіжним при $\lambda>1$ і розбіжним при $\lambda\le 1$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

Розв'язання. Так як $|\cos n|\le 1$, то $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжний, то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ є збіжний. Отже і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ є збіжний.

Друга ознака порівняння. Нехай $0<a_n$, $0<b_n$ для всіх натуральних n, і існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=M>0$. Тоді ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ збігаються чи розбігаються одночасно.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

Розв’язання. Позначимо $a_n = \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{\pi}{\sqrt{n}}$. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n}} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ є розбіжний і $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin \pi/\sqrt{n}}{\pi/\sqrt{n}} = 1$, отже

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ також розбіжний.

Ознака Даламбера. Якщо для всіх членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконано

умову $a_n > 0$ і існує границя $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, тоді

при $\rho < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається;

при $\rho > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається;

при $\rho = 1$ встановити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за даною ознакою

неможливо.

<u>*Приклад 5.*</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

Розв’язання.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\Big/(n+1)!}{5^n\Big/n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{5^n}\cdot\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$$

Отже, за ознакою Даламбера даний ряд є збіжний.

Ознака Коші. Якщо для всіх членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ виконано умову

$a_n\ge 0$ і існує границя $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, тоді

при $\rho<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається;

при $\rho>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ розбігається;

при $\rho=1$ встановити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ за даною ознакою

неможливо.

<u>Приклад 6.</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

Розв’язання.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-n^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{e}<1$$

.

Отже, за ознакою Коші даний ряд є збіжний.

Нагадаємо також, що $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\lambda}}=1$ для всіх дійсних λ.

Інтегральна ознака Коші. Нехай функція $f:[1,+\infty[\to R$ задовольняє умови

1. $f(x)\geq 0$ для всіх $x\geq 1$
2. $f(x_1)\geq f(x_2)$ для всіх $x_2\geq x_1\geq 1$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

<u>*Приклад 7.*</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. Функція $f(x)$ є додатньою і монотонно спадною при $x\geq 2$. Отже збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ рівносильна збіжності інтегралу $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Дослідимо на збіжність даний інтеграл :

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^A\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln A}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Таким чином, інтеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ є збіжний, а отже і ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ є збіжний.

Ознака Лейбніца. Якщо числа $a_n > 0$, $n \geq 1$ задовольняють умови:

1. $a_n \geq a_{n+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ збігається і $|S - S_n| \leq a_{n+1}$

<u>*Приклад 8.*</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Розв’язання. Оскільки $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то даний ряд є збіжний за ознакою Лейбніца.

2. Степеневі ряди.

Для знаходження радіусу збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ використовують формули Коші-Адамара

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{або} \quad r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Теорема Абеля каже, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ при $|x - x_0| < r$ є абсолютно збіжним при $|x - x_0| > r$ − розбіжний. У точках $x = x_0 \pm r$ ряд може як збігатися, так і розбігатися, тому в даних точках потрібно проводити окремі дослідження на збіжність.

Якщо $r = 0$, то степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний лише в точці $x = x_0$.

Якщо $r = \infty$, то степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний для всіх дійсних значень x.

<u>*Приклад 9.*</u> Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Знайдемо радіус даного степеневого ряду за другою формулою.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\sqrt{n+1}}{5^n \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 5\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 5.$$

Підставляємо $x = 5$, отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Даний ряд є розбіжний.

Підставляємо $x = -5$, отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Даний ряд є збіжний за ознакою Лейбніца. Отже областю збіжності даного степеневого ряда є множина значень $-5 \le x < 5$.

Ряди Тейлора.

Нехай функція $f(x)$ є нескінченно-диференцыйованою в деякому околі точки x_0. Степеневий ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

називається рядом Тейлора функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора називається рядом Маклорена.

Розглянемо розвинення в ряд Маклорена основних функцій:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (1)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (2)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1) \qquad (4)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1) \qquad (5)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1<x\le 1) \qquad (6)$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1) \qquad (7)$$

<u>*Приклад 10.*</u> Розвинути функцію $f(x) = 2^{x^2+1}$ в ряд Маклорена.

Розв’язання. Зауважимо, що $2^{x^2+1} = 2^{x^2} 2^1 = 2e^{x^2 \ln 2}$. Розклад функції $e^{x^2 \ln 2}$ в ряд Маклорена можна отримати з рокладу (1) замінивши x на $x^2 \ln 2$. Таким чином $2^{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n}}{n!} \ln^n 2$

<u>*Приклад 11.*</u> Розвинути функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Маклорена.

Розв’язання. Зауважимо, що $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. Розвинення функції $\cos 2x$ отримаємо замінивши в розкладі (3) x на $2x$.

Таким чином $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Степеневі ряди можна почленно диференціювати в області збіжності, за умови, що всі члени ряду є диференційованими функціями, а ряд з похідних рівномірно збіжний в даній області.

<u>*Приклад 12.*</u> Розвинути функцію $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ в ряд Маклорена.

Розв’язання.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

при $(-1 < x < 1)$.

<u>Приклад 13.</u> Розвинути функцію $f(x) = arctg\dfrac{4x-5}{2x+10}$ в ряд Маклорена.

Розв’язання. Знайдемо похідну функції $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{10}{4x^2+25} = \frac{2/5}{4/25\,x^2+1}.$$

Розклад функції $\dfrac{2/5}{4/25\,x^2+1}$ в ряд Маклорена можна отримати замінивши в розкладі (5) x на $4/25\,x^2$. Таким чином

$$\frac{2/5}{4/25\,x^2+1} = \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{25}x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{5^{2n+1}}x^{2n}.$$

Про інтегруємо почленно даний степеневий ряд:

$$\int_0^x f'(s)ds = f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{5^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Оскільки $f(0) = -arctg\dfrac{1}{2}$, то остаточно отримаємо відповідь

$$f(x) = -arctg\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{5^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Дробово-раціональну функцію можна розвинути в ряд Маклорена розклавши її на елементарні доданки.

<u>Приклад 14.</u> Розвинути функцію $f(x)=\dfrac{x+31}{x^2-x-12}$ в ряд Маклорена.

Розв'язання. Розкладемо дану функцію на прості доданки:

$\dfrac{x+31}{(x-4)(x+3)}=\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{(A+B)x+3A-4B}{(x-4)(x+3)}$. Таким чином

$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-4B=31 \end{cases}$. Розв'язуючи дану систему отриваємо $\begin{cases} A=5 \\ B=-4 \end{cases}$.

$$f(x)=\frac{5}{x-4}-\frac{4}{x+3}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-x/4}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+x/3}=-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n-\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{4^{n+1}}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}x^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4^{n+1}}+\frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n$$

<u>Приклад 15.</u> Розвинути функцію $f(x)=(x+1)e^x$ в ряд Маклорена.

Розв'язання. Скористаємось розкладом (1)

$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $xe^x=x\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{k!}$. Замінивши в останній рівності k на $n-1$ отримаємо, що $xe^x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)!}$.

Таким чином

$$(x+1)e^x = xe^x + e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}\right)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n!}\right)x^n.$$

4. Застосування рядів до наближених обчислень

Степеневі ряди використовуються для наближеного обчислення визначених інтегралів. Нагадаємо, що якщо ми маємо ряд, що задовольняє умовам ознаки Лейбніца, то залишок цього ряду не перевищує по модулю першого відкиненого члена ряду, іншими словами $|S - S_n| \le a_{n+1}$.

<u>*Приклад 16.*</u> Використовуючи розклад підінтегральної функції у степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int_0^{1.5}\frac{\sin x^2 dx}{x^2}$ з точністю до 0.001.

Розв'язання. Розвинемо підінтегральну функцію у ряд Маклорена. Щоб отримати розвинення функції $\sin x^2$ у ряд Маклорена, ми у розкладі (2) замінимо x на x^2.

$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$. Отже

$$\frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n+1)!}.$$

Інтегруючи почленно даний степеневий ряд отримаємо

$$\int \frac{\sin x^2 dx}{x^2} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n+1)!}\right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n+1)!}$$

Таким чином

$$\int_0^{1.5} \frac{\sin x^2 dx}{x^2} = \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 7!} + \ldots \right) \Bigg|_0^{1.5} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{5 \cdot 3!} \frac{3^5}{2^5} + \frac{1}{9 \cdot 5!} \frac{3^9}{2^9} - \frac{1}{13 \cdot 7!} \frac{3^{13}}{2^{13}} + \ldots$$

Бачимо, що четвертий член отриманого ряду є менший за 0.001, тому для отримання потрібної точності нам достатньо просумувати три перші члени данного ряду. Отже

$$\int_0^{1.5} \frac{\sin x^2 dx}{x^2} \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{5 \cdot 3!} \frac{3^5}{2^5} + \frac{1}{9 \cdot 5!} \frac{3^9}{2^9} = \frac{3}{2} - \frac{81}{320} + \frac{729}{20480} = \frac{5163}{4096} \approx 1.260$$

5. Застосування рядів до розв’язування диференціальних рівнянь.

Маючи диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ ми можемо розкласти функцію, яка є розв’язком даного диференцільного рівняння в ряд Тейлора в околі точки x_0.

Приклад 17. Знайти перших чотири члени розкладу в степеневий ряд розв’язку рівняння $y' = x^2 y + y^3$ з початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв’язання . Обчислимо значення $y'(0)$:

$$y'(0)=0^2 y(0)+y(0)^3=1.$$

Продиференціємо почленно вихідне диференціальне рівняння:

$$y''=2xy+x^2y'+3y^2y'.$$

Виходячи з даної рівності знайдемо значення $y''(0)$:

$$y''(0)=2\cdot 0\cdot y(0)+0^2\cdot y(0)'+3y(0)^2\cdot y(0)'=3.$$

Продиференціюємо ще раз диференціальне рівняння:

$$y'''=2y+2xy'+2xy'+x^2y''+6yy'^2+3y^2y''=2y+4xy''+x^2y''+6yy'^2+3y^2y''$$

.Виходячи з даної рівності знайдемо значення $y'''(0)$:

$$y'''(0)=2y(0)+4\cdot 0\cdot y'(0)+0^2\cdot y''(0)++6y(0)\cdot y'(0)^2+$$
$$+3y(0)^2\cdot y''(0)=17$$

Таким чином

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots=$$
$$=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{17}{6}x^3.$$

6. Ряди Фур’є.

Рядом Фур’є $2l$ періодичної функції $f(x)$ називається ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

де коефіцієнти ряду визначаються рівностями

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

<u>*Приклад 18.*</u> Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 10 \\ 5x \end{cases} \text{ при } \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 2 \le x < 4 \end{cases}$$

Розв'язання. $2l = 4$, отже $l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 10dx + \int_2^4 5xdx = 10x\Big|_0^2 + \frac{5x^2}{2}\Big|_2^4 = 50$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 10\cos\frac{k\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_2^4 5x\cos\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{10}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + 5\left(\frac{x}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2} + \frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{k^2\pi^2}(1-\cos k\pi)$$

При парних k маємо, що $\cos k\pi = 1$, отже $a_k = 0$. При непарних k

маємо, що $\cos k\pi = -1$, отже $a_k = \dfrac{20}{k^2\pi^2}$.

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 10\sin\frac{k\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_2^4 5x\sin\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{10}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + 5\left(-\frac{x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2} + \frac{2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2k\pi}(20(1-\cos k\pi) + 5(4\cos k\pi - 8)) = -\frac{10}{2k\pi}.$$

<u>Завдання 1.</u> Дослідити на збіжність числові ряди.

1. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ в. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

2. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

3. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{6n-1}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

4. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2+1)}{n^2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

5. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n)}$

6. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ в. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3-1)\ln n}$

7. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+1}}{n^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

8.) а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+3}\right)^n$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{\pi}{n}$

9. а. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty} tg^n\left(\frac{\pi n}{3n+2}\right)$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}2^{\sqrt{n}}}$

10. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n}\right)$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$ в. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

11. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^n\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$ в. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$

12. а. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(1/n\right)$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^{n^2+1}}$ в. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln n}$

13. а. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi n}{2n+1}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-4}\right)^n$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

14. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^2(n+4)}$

15. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n^4}{n!}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^4}$

16. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n^2+1}$ б. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{\ln^n(1+n)}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)e^{-n}$

17. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}$

18. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}\cos\left(1/n\right)$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{9^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$

19. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{7n-2}\right)^n$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^3(n+3)}$

20. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$ в. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n ctg\frac{\pi}{n}$

21. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$

22. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{13n-12}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$

23. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{18n+7}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{2n-1}}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+1)}$

24. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(1+\ln^2 n)}$

25. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{3^{2n+1}}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n(1+\ln^3 n)}$

26. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{9n+2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$

27. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{7+n^2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+3n+2}{3n^2+n-3}\right)^n$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

28. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n+1}}{3^{3n+1}}$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n(1+\ln^4 n)}$

29. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\left(\frac{5n+1}{2n+1}\right)$ в. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,2^{\sqrt{n}}}$

30. а. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+2}$ б. $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ в. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+\ln n}$

<u>Завдання 2</u>. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$.

1. $a_n=\frac{3^n}{n!}$ 2. $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 3. $a_n=\frac{n+1}{2^n(n^2+1)}$

4. $a_n=\frac{n^2}{n+1}$ 5. $a_n=\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$ 6. $a_n=\frac{1}{n\ln n}$

7. $a_n=\left(\frac{n+3}{n+6}\right)^n$ 8. $a_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$ 9. $a_n=\frac{2^n}{n!}$

10. $a_n = \dfrac{3^n}{n(n+1)}$ 11. $a_n = \dfrac{1}{n2^n}$ 12. $a_n = \dfrac{n}{3^n(n+1)}$

13. $a_n = \dfrac{5^n}{\sqrt[n]{n}}$ 14. $a_n = \dfrac{n+1}{2^n(n-3)}$ 15. $a_n = \dfrac{n+2}{n(n+1)}$

16. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ 17. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 18. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$

19. $a_n = \dfrac{n!}{10^n}$ 20. $a_n = \dfrac{1}{n3^{n-1}}$ 21. $a_n = \dfrac{n}{3^n}$

22. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ 23. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ 24. $a_n = \dfrac{n+1}{2^{n-1}\cdot 3^n}$

25. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 26. $a_n = \dfrac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$ 27. $a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{2^n}}$

27. $a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{n}}$ 29. $a_n = \dfrac{2^n}{n^2+1}$ 30. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

<u>Завдання 3.</u> Розвинути в ряд Маклорена наступні функції.

1. $f(x) = x^2 \sin x$
2. $f(x) = \arcsin x$
3. $f(x) = x(\sin 2x + \sin 3x)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$
5. $f(x) = (x+1)e^x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{6 - x + x^2}$

7. $f(x) = x^3 3^x$

8. $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

9. $f(x) = \frac{3x^2}{3 + x}$

10. $f(x) = \cos^4 x$

11. $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$

12. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$

13. $f(x) = \arccos x$

14. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9x + 20}$

15. $f(x) = x \sin x^2$

16. $f(x) = \frac{1}{4 + 5x + x^2}$

17. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

18. $f(x) = x^2 (\cos 5x + \cos 7x)$

19. $f(x) = \frac{1}{2}(5^x + 5^{-x})$

20. $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{4}\right)$

21. $f(x) = x 2^{x+1}$

22. $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}$

23. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$

24. $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{2x}$

25. $f(x)=(x^2+2)\cos x$

26. $f(x)=(x+1)e^{x+1}$

27. $f(x)=arcctgx$

28. $f(x)=5^{x^2+1}$

29. $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

30. $f(x)=(e^x+1)^2$

<u>Завдання 4.</u> Використовуючи розклад підінтегральної функції у степеневий ряд, обчислити визначений інтегр ал з точністю до 0.001.

1. $\int_0^{0.2} arctg(x^2)dx$ 2. $\int_0^1 e^{-x^4}dx$ 3. $\int_0^1 x^2\sin x dx$

4. $\int_0^{0.5} e^{-x^3}dx$ 5. $\int_0^{0.5}\dfrac{dx}{1+x^7}$ 6. $\int_0^{0.5} x^2\sin x^2 dx$

7. $\int_0^{0.5} \frac{arctgx}{x} dx$ 8. $\int_0^{0.25} \sqrt{1+x^2} dx$ 9. $\int_0^{0.5} \frac{\sin x^3}{x} dx$

10. $\int_0^{0.3} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ 11. $\int_0^{0.1} \ln(1+x) dx$ 12. $\int_0^{0.25} \cos x^2 dx$

13. $\int_0^{0.1} \frac{1-e^x}{x} dx$ 14. $\int_0^{0.3} \ln(1+x^3) dx$ 15. $\int_0^{1} \frac{x-\sin x}{x^3} dx$

16. $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$ 17. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^3}$ 18. $\int_0^{0.5} \sin x^2 dx$

19. $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ 20. $\int_0^{0.5} \sqrt[3]{1+x} dx$ 21. $\int_0^{0.5} \arcsin(x^2) dx$

22. $\int_0^{0.5} \cos x^2 dx$ 23. $\int_0^{0.25} \frac{dx}{1+x^4}$ 24. $\int_0^{0.3} \frac{1-\cos x^2}{x} dx$

25. $\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x} dx$ 26. $\int_0^{0.5} \ln(1+x^5) dx$ 27. $\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^3} dx$

28. $\int_0^{1} \cos\frac{x^2}{2} dx$ 29. $\int_0^{0.2} \sin 25x^2 dx$ 30 . $\int_0^{0.3} e^{-2x^2} dx$

<u>Завдання 5.</u> Знайти перших чотири члени розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння.

1. $y' = 4x - y^2,\ y(0) = 1.$

2. $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = -1$.

3. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$.

4. , $y' = ye^x + 3x$, $y(0) = 0$.

5. $y' = \cos xy$, $y(0) = -1$.

6. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

7. $y' = e^{\sin x} + y$, $y(0) = 0$.

8. $y' = x + e^y$, $y(0) = 0$.

9. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

10. $y' = \sin xy$, $y(0) = -1$

11. $y' = x^3 + y^3$, $y(0) = 1$.

12. $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0) = 1$.

13. $y' = e^{x^2} + 2xy^2$, $y(0) = 0$.

14. $y' = \sin x^2 + 3(x+1)y$, $y(0) = -1$.

15. $y' = \cos(x - y)$, $y(0) = 0$.

16. $y' = x^3 y + y^2$, $y(0) = 1$.

17. $y' = x + y + y^2$, $y(0) = 1$.

18. $y' = xy - y^2$, $y(0) = 1$.

19. $y' = \cos x + \cos y$, $y(0) = 0$.

20. $y' = e^{\sin x} + y^2$, $y(0) = 0$.

21. $y' = \dfrac{\sin x}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$.

22. $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0) = 1$.

23. $y' = e^x + e^y$, $y(0) = 0$.

24. $y' = xy^2 + ye^x$, $y(0) = 1$.

25. $y' = (x - y)^2 - 1$, $y(0) = 0$.

26. $y' = \sin(x - y) + 2$, $y(0) = 0$.

27. $y' = \sin x + e^y$, $y(0) = 0$.

28. $y' = e^{y-x}$, $y(0) = 0$.

29. $y' = x^2 + y^2 - 3y$, $y(0) = 1$.

30. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$.

Завдання 6. Розкласти функцію в ряд Фур’є на вказаному інтервалі

1. $f(x) = x - 1$ при $-1 < x < 1$.

2. $f(x) = |x|$ при $-\pi < x < \pi$.

3. $f(x) = \begin{cases} 0 \\ x \end{cases}$ при $\begin{cases} -\pi < x < 0 \\ 0 \le x < \pi \end{cases}$.

4. $f(x) = x^2$ при $-2 < x < 2$.

5. $f(x) = x^2 + 1$ при $-2 < x < 2$.

6. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ при $-\pi < x < \pi$.

7. $f(x) = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$ при $\begin{cases} -\pi < x < 0 \\ 0 \le x < \pi \end{cases}$.

8. $f(x) = x + 1$ при $-\pi < x < \pi$.

9. $f(x) = x^2$ при $0 < x < 2\pi$.

10. $f(x) = x^3$ при $0 < x < \pi$.

11. $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$.

12. $f(x) = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$ при $\begin{cases} -\pi < x < 0 \\ 0 \le x < \pi \end{cases}$.

13. $f(x) = \begin{cases} -1 \\ x \end{cases}$ при $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ 0 \le x < 2 \end{cases}$.

14. $f(x) = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$ при $\begin{cases} -3 < x < 0 \\ 0 \le x < 3 \end{cases}$.

15. $f(x) = \begin{cases} 0 \\ x \end{cases}$ при $\begin{cases} -3 < x < 0 \\ 0 \le x < 3 \end{cases}$.

16. $f(x) = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$ при $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ 0 \le x < 2 \end{cases}$.

17. $f(x) = 1 - x$ при $0 < x < 2$.

18. $f(x) = 4 - 2x$ при $0 < x < 2$.

19. $f(x) = 1 + x$ при $0 < x < 2$.

20. $f(x) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ при $\begin{cases} -3 < x < 0 \\ 0 \le x < 3 \end{cases}$.

21. $f(x) = 2 - x$ при $0 < x < 2$.

22. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \\ 1 \end{cases}$ при $\begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 \le x < 1 \end{cases}$.

23. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \\ 1 - x \end{cases}$ при $\begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 \le x < 1 \end{cases}$.

24. $f(x) = \sin x$ при $0 < x < \pi$.

25. $f(x) = \cos x$ при $0 < x < \pi$.

24. $f(x) = \sin 2x$ при $0 < x < \pi/2$.

25. $f(x) = \cos 2x$ при $0 < x < \pi/2$.

26. $f(x) = \sin 3x$ при $0 < x < \pi/3$.

27. $f(x) = \cos 3x$ при $0 < x < \pi/3$.

28. $f(x) = 1 + \sin x$ при $0 < x < \pi$.

29. $f(x) = 1 - \cos x$ при $0 < x < \pi$.

30. $f(x) = \sin 4x$ при $0 < x < \pi/4$.

Використана література

1. *Васильченко І.П., Данилов В.Я., Лобанов А.І., Таран Є.Ю.* Вища математика. Основні означення, приклади і формули. Частина 2. Київ: Либідь, 1992. − 256 с.

2. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу Москва: Высшая школа, 1964. − 480с.

3. *Овчинников П.П.* Вища математика. Частина 2. Київ: Техніка, 2000.− 792 с.

4. *Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 3. Минск: Вышэйшая школа, 1991. − 288 с.

Зміст