

Міністерство освіти і науки України  
Українська академія друкарства  
Кафедра прикладної математики і фізики

**Коляда Р. В., Мельник О. М.**  
**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ**  
**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

**Ч. 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРИ**

для студентів спеціальностей

122 Комп'ютерні науки (група КН-11) та

126 Інформаційні системи та технології (група ІСТ-11)

(модуль 2 другого семестру першого курсу 2019-2020 н. р.)

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і фізики  
Української академії друкарства (протокол № 1 від 29 серпня 2019 р.)  
Номер варіанта завдання співпадає з номером студента у журналі групи

## ТЕМА 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРИ

### 4.1. Задані координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ , $B(x_2, y_2, z_2)$ , $C(x_3, y_3, z_3)$ , $D(x_4, y_4, z_4)$ .

- 1) Скласти рівняння площин, які проходять:
  - а) через точку  $A$  перпендикулярно до вектора  $AB$ ;
  - б) через точки  $A$  і  $B$  паралельно вектору  $CD$ ;
  - в) через точку  $A$  паралельно векторам  $BD$  і  $CD$ ;
  - г) через три точки  $A, B, C$ .
- 2) Скласти:
  - а) рівняння прямої  $BD$ ;
  - б) рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини  $D$  на площину  $ABC$ ;
  - в) знайти основу перпендикуляра опущеного з точки  $D$  на площину  $ABC$ ;
  - г) знайти кут між прямою  $BD$  і площиною  $ABC$ .
- 3) Знайти:
  - 1) довжину ребра  $BD$ ;
  - 2) кут між двома ребрами  $AB$  і  $AD$ ;
  - 3) кут між ребром  $AD$  і гранню  $ABC$ , якій воно не належить;
  - 4) знайти кут між площинами  $ABC$  та  $ABD$ ;
  - 5) площу грані  $ABC$ ;
  - 5) об'єм піраміди.

$B \bullet$	$A$	$B$	$C$	$D$
1	(3, 1, 4)	(-1, 6, 1)	(-1, 1, 6)	(0, 4, -1)
2	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)	(1, 7, 3)	(8, 5, 8)
3	(3, 5, 4)	(5, 8, 3)	(1, 2, -2)	(-1, 0, 2)
4	(2, 4, 3)	(1, 1, 5)	(4, 9, 3)	(3, 6, 7)
5	(9, 5, 5)	(-3, 7, 1)	(5, 7, 8)	(6, 9, 2)
6	(0, 7, 1)	(2, -1, 5)	(1, 6, 3)	(3, -9, 8)
7	(5, 5, 4)	(1, -1, 4)	(3, 5, 1)	(5, 8, -1)
8	(6, 1, 1)	(4, 6, 6)	(4, 2, 0)	(1, 2, 6)
9	(7, 5, 3)	(9, 4, 4)	(4, 5, 7)	(7, 9, 6)
10	(6, 8, 2)	(5, 4, 7)	(2, 4, 7)	(7, 3, 7)
11	(4, 2, 5)	(0, 7, 1)	(0, 2, 7)	(1, 5, 0)
12	(4, 4, 10)	(7, 10, 2)	(2, 8, 4)	(9, 6, 9)
13	(4, 6, 5)	(6, 9, 4)	(2, 10, 10)	(7, 5, 9)
14	(3, 5, 4)	(8, 7, 4)	(5, 10, 4)	(4, 7, 8)
15	(10, 9, 6)	(2, 8, 2)	(9, 8, 9)	(7, 10, 3)
16	(1, 8, 2)	(5, 2, 6)	(5, 7, 4)	(4, 10, 9)
17	(6, 6, 5)	(4, 9, 5)	(4, 6, 11)	(6, 9, 3)
18	(7, 2, 2)	(-5, 7, -7)	(5, -3, 1)	(2, 3, 7)
19	(8, -6, 4)	(10, 5, -5)	(5, 6, 8)	(8, 10, 7)
20	(1, -1, 3)	(6, 5, 8)	(3, 5, 8)	(8, 4, 1)
21	(1, -2, 7)	(4, 2, 10)	(2, 3, 5)	(5, 3, 7)
22	(4, 2, 10)	(1, 2, 0)	(3, 5, 7)	(2, -3, 5)
23	(2, 3, 5)	(5, 3, -7)	(1, 2, 7)	(4, 2, 0)
24	(5, 3, 7)	(-2, 3, 5)	(4, 2, 10)	(1, 2, 7)
25	(4, 3, 5)	(1, 9, 7)	(0, 2, 0)	(5, 3, 10)
26	(3, 2, 5)	(4, 0, 6)	(2, 6, 5)	(6, 4, -1)
27	(2, 1, 6)	(1, 4, 9)	(2, -5, 8)	(5, 4, 2)
28	(2, 1, 7)	(3, 3, 6)	(2, -3, 9)	(1, 2, 5)
29	(2, -1, 7)	(6, 3, 1)	(3, 2, 8)	(2, -3, 7)
30	(0, 4, 5)	(3, -2, 1)	(4, 5, 6)	(3, 3, 2)

## 4.2. Розв'язати наступні задачі

- 2.1. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проведена через точку  $M(-2, 7, 3)$  паралельно площині  $x - 4y + 5z - 1 = 0$ .
- 2.2. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка  $M_1, M_2$ , перпендикулярно цьому відрізку, якщо  $M_1(1, 5, 6), M_2(-1, 7, 10)$ .
- 2.3. Знайти відстань від точки  $M(2, 0, -0,5)$  до площини  $4x - 4y + 2z + 17 = 0$ .
- 2.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $A(2, -3, 5)$  паралельно площині  $Oxy$ .
- 2.5. Скласти рівняння площини, якій належить вісь  $Ox$  і точка  $A(2, 5, -1)$ .
- 2.6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $A(2, 5, -1), B(-3, 1, 3)$  паралельно вісі  $Oy$ .
- 2.7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $A(2, 5, -1)$  і пряму 
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}.$$
- 2.8. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі:  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$  і 
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$
- 2.9. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини  $x - y - 7z + 9 = 0$  з площиною, яка проходить через вісь  $Ox$  і точку  $A(3, 2, -5)$ .
- 2.10. Скласти рівняння площини «у відрізках», якщо вона проходить через точку  $M(6, -10, 1)$  і відсікає на осі  $Ox$  відрізок  $a = -3$ , а на осі  $Oz$  – відрізок  $c = 2$ .
- 2.11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $A(2, 3, -4)$  паралельно двом векторам  $\vec{a} = (4, 1, -1)$  і  $\vec{b} = (2, -1, 2)$ .
- 2.12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $A(1, 1, 0)$  і  $B(2, -1, -1)$  перпендикулярно до площини  $5x + 2y + 3z - 7 = 0$ .
- 2.13. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин:  $2x - 3y + z - 1 = 0$  і  $x - y + 5z + 3 = 0$ .
- 2.14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $A(3, -1, 2)$  і  $B(2, 1, 4)$  паралельно вектору  $\vec{a} = (5, -2, -1)$ .
- 2.15. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора  $\overline{AB}$ , якщо  $A(5, -2, 3), B(1, -3, 5)$ .
- 2.16. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проведена через точку  $M(-2, 7, 3)$  паралельно площині  $x - 4y + 5z - 1 = 0$ .
- 2.17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M(1, -1, 2)$ , перпендикулярно відрізку  $M_1M_2$ , якщо  $M_1(2, 3, -4), M_2(-1, 2, -3)$ .
- 2.18. Показати, що пряма  $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$  паралельна площині  $x + 3y - 2z - 1 = 0$ , а пряма  $\{x = t, y = t - 2, z = 2t + 1\}$  лежить у цій площині.
- 2.19. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку  $A(3, -4, 1)$  паралельно координатній площині  $Oxy$ .
- 2.20. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь  $Oy$  і точку  $M(3, -5, 2)$ .
- 2.21. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $M(3, -1, 2), N(2, 1, 4)$  паралельно вісі  $Oz$ .

- 2.22. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M(2, 3, -1)$ , і пряму  $\{x = t - 3, y = 2t + 5, z = -3t + 1\}$ .
- 2.23. Знайти проекцію точки  $M(4, -3, 1)$  на площину  $x - 2y - z - 15 = 0$ .
- 2.24. Визначити при якому значенні  $B$  площини  $x - 4y + z - 1 = 0$  і  $2x + By + 10z - 3 = 0$  будуть перпендикулярні.
- 2.25. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M(2, -3, -4)$  і відсікає на вісях координат відрізки однакової величини.
- 2.26. При яких значеннях  $A$  і  $n$  пряма  $x : 3 = (y - 5) : n = (z + 5) : 6$  перпендикулярна до площини  $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$ ?
- 2.27. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $A(2, 3, -1)$  і  $B(1, 1, 4)$  перпендикулярно до площини  $x - 4y + 3z + 2 = 0$ .
- 2.28. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин:  $x + 5y - z + 7 = 0$  і  $3x - y + 2z - 3 = 0$ .
- 2.29. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $A(2, 3, -5)$  і  $B(-1, 1, -6)$  паралельно вектору  $\vec{a} = (4, 4, 3)$ .
- 2.30. З'ясувати, при якому значенні  $C$  площини  $3x - 5y + Cz - 3 = 0$  і  $x - 3y + 3z + 5 = 0$  будуть перпендикулярні.

### 4.3. Розв'язати наступні задачі:

- 3.1. Довести паралельність прямих

$$(x - 1) : 6 = (y + 2) : 2 = z : (-1) \text{ і } \begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0, \\ x + 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

- 3.2. Довести, що пряма  $(x + 1) : 2 = (y + 1) : (-1) = (z - 3) : 3$  паралельна площині  $2x + y - z = 0$ , а пряма  $(x - 2) : 2 = y : (-1) = (z - 4) : 3$  лежить у цій площині.

- 3.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(1, -3, 3)$  і утворює з осями координат кути у  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  і  $120^\circ$  відповідно.

- 3.4. Довести, що пряма  $(x - 1) : 2 = (y + 1) : 3 = (z - 1) : 6$  перпендикулярна до прямої  $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

- 3.5. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника з вершинами:  $A(3, 6, -7)$ ,  $B(-5, 1, -4)$  і  $C(0, 2, 3)$ , яка проведена з вершини  $C$ .

- 3.6. При якому значенні  $n$  пряма  $(x + 2) : 3 = (y + 1) : n = z : 1$  буде паралельна прямій  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$ .

- 3.7. Знайти точку перетину прямої  $(x - 1) : 1 = (y + 1) : (-2) = z : 6$  з площиною  $2x + 3y + z - 1 = 0$ .

- 3.8. Знайти проекцію точки  $A(3, 1, -1)$  на площину  $x + 2y + 3z - 30 = 0$ .

- 3.9. При якому значенні  $C$  площини:  $3x - 5y + Cz - 3 = 0$  і  $x + 3y + 2z + 5 = 0$  будуть перпендикулярні?

- 3.10. При якому значенні  $A$  площина  $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$  паралельна прямій  $(x - 1) : 4 = (y + 2) : 3 = z : 1$ ?

- 3.11. При яких значеннях  $n$  і  $C$  пряма  $(x-1):n=(y+1):4=(z-5):(-1)$  перпендикулярна площині  $3x-2y+Cz+1=0$ ?
- 3.12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно прямій  $\{x=2t+5, y=-3t+1, z=-7t-4\}$ .
- 3.13. Перевірити, чи належать точки  $A(0, 0, 2)$ ,  $B(4, 2, 5)$  і  $C(12, 6, 11)$  одній прямій.
- 3.14. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(2, -5, 3)$  паралельно прямій  $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$
- 3.15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(2, -3, 4)$  і перпендикулярна до прямих:  $(x+2):1=(y-3):(-1)=(z+1):1$  і  $(x+4):2=y:1=(z-4):(-3)$ .
- 3.16. При яких значеннях  $A$  і  $B$  площина  $Ax+By+6z-7=0$  перпендикулярна до прямої  $(x-2):2=(y+5):(-4)=(z+1):3$ ?
- 3.17. Показати, що пряма  $x:6=(y-3):(-8)=(z-1):(-9)$  паралельна площині  $x+3y-2z+1=0$ , а пряма  $(x=t+7, y=t-2, z=2t+1)$  лежить у цій площині.
- 3.18. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь  $Oz$  і точку  $A(-3, 1, -2)$ .
- 3.19. Показати, що прямі  $x:1=(y-1):(-2)=z:3$  і  $\{3x+y-5z+1=0, 2x+3y-8z+3=0\}$  перпендикулярні.
- 3.20. При якому значенні  $D$  пряма  $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ x+4y-z+D=0 \end{cases}$  перетинає вісь  $Oz$ .
- 3.21. При якому значенні  $p$  прямі:  $\{x=2t+5, y=-t+2, z=pt-7\}$  і  $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$  паралельні?
- 3.22. Знайти точку перетину прямої  $(x-7):5=(y-1):1=(z-5):4$  і площини  $3x-y+2z-8=0$ .
- 3.23. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $A(2, -5, 3)$  паралельно площині  $Oxz$ .
- 3.24. Скласти загальні рівняння прямої, утвореної перетином площини  $x+2y-z+5=0$  і площини, яка проходить через вісь  $O_y$  і точку  $M(5, 3, 2)$ .
- 3.25. При яких значеннях  $B$  і  $D$  пряма  $\begin{cases} x-2y+z-9=0, \\ 3x+By+z+D=0 \end{cases}$  лежить у площині  $Oxy$ ?
- 3.26. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $A(2, 3, 3)$  паралельно двом векторам  $\vec{a}=(-1, -3, 1)$  і  $\vec{b}=(4, 1, 6)$ .
- 3.27. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(3, 4, 5)$  паралельно осі  $Ox$ .
- 3.28. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(2, 3, 1)$  перпендикулярно до прямої  $(x+1):2=y:(-1)=(z-2):3$ .
- 3.29. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(1, -5, 3)$  перпендикулярно до прямих  $x:2=(y-2):3=(z+1):(-1)$  і  $\{x=3t+1, y=-t-25, z=2t+3\}$ .
- 3.30. Знайти точку, яка симетрична точці  $A(4, 3, 10)$  відносно прямої  $(x-1):2=(y-2):4=(z-3):5$ .

4.4. Пряма ( $L$ ) задана загальним рівнянням  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Скласти канонічне рівняння прямої ( $L$ ), а також рівняння площини, що проходить через пряму ( $L$ ) і точку  $M(x_1, y_1, z_1)$ .

№	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$	$D_2$	$x_1$	$y_1$	$z_1$
01	2	-1	-3	1	1	5	1	0	3	0	2
02	1	2	3	-1	2	-3	2	-9	1	2	0
03	1	1	-1	-1	8	3	-6	-2	-1	2	1
04	1	1	-1	2	4	-3	1	-1	2	-3	0
05	2	5	-3	-4	4	-3	2	-9	0	4	-2
06	2	7	-1	-8	1	2	1	-4	-3	0	5
07	3	4	2	-8	1	5	1	0	1	3	0
08	1	-4	-2	3	3	1	1	-5	5	1	-2
09	1	1	-1	-1	1	2	1	-4	-2	0	1
10	3	1	1	-5	4	-3	1	-1	0	-5	2
11	2	1	1	-2	2	-1	-3	6	0	2	3
12	1	-3	2	2	1	3	1	14	4	1	2
13	1	-2	1	-4	2	2	-1	-8	4	2	1
14	1	1	1	-2	1	-1	-2	2	2	3	5
15	2	3	1	6	1	-3	-2	3	10	-9	5
16	3	1	-1	-6	3	-1	2	0	-7	6	2
17	1	5	2	11	-1	-1	-1	-1	15	-10	2
18	3	4	-2	1	2	-4	3	4	2	6	10
19	5	1	-3	4	1	-1	2	2	2	8	10
20	1	-1	-1	-2	1	-2	1	4	2	4	6
21	4	1	3	2	2	-1	1	-8	3	7	11
22	3	3	-2	-1	2	-3	1	6	1	2	3
23	6	-7	-4	-2	1	7	-1	-5	2	0	4
24	8	-1	-3	-1	1	1	1	10	1	2	2
25	6	-5	-4	8	6	5	3	4	7	0	-1
26	1	5	-1	-5	2	-5	2	5	3	5	2
27	2	-3	1	6	1	-3	-2	3	2	5	1
28	5	1	2	4	1	-1	-3	2	5	1	3
29	4	1	1	2	2	-1	-3	-8	4	0	-3
30	2	1	-3	-2	2	1	1	6	-4	6	3

**4.5. Знайти відстань** від точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до площини, що проходить через три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ .

№	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$x_3$	$y_3$	$z_3$
01	-12	7	-1	-3	4	-7	1	5	-4	-5	-2	0
02	1	-6	-5	-1	2	-3	4	-1	0	2	1	-2
03	-7	0	-1	-3	-1	1	-9	1	-2	3	-5	4
04	-2	4	2	1	-1	1	-2	0	3	2	1	-1
05	2	-1	4	1	2	0	1	-1	2	0	1	-1
06	-5	-9	1	1	0	2	1	2	-1	2	-2	1
07	3	-2	-9	1	2	-3	1	0	1	-2	-1	6
08	-6	7	-10	3	10	-1	-2	3	-5	-6	0	-3
09	-2	3	5	-1	2	4	-1	-2	-4	3	0	-1
10	-3	4	-5	0	-3	1	-4	1	2	2	-1	5
11	4	3	0	1	3	0	4	-1	2	3	0	1
12	-21	20	-16	-2	-1	-1	0	3	2	3	1	-4
13	3	6	68	-3	-5	6	2	1	-4	0	-3	-1
14	2	-10	8	2	4	-3	5	-6	0	-1	3	-3
15	-3	2	7	1	-1	2	2	1	2	1	1	4
16	5	-4	5	1	3	6	2	2	1	-1	0	1
17	-12	1	8	-4	2	6	2	-3	0	-10	5	8
18	10	1	8	7	2	4	7	-1	-2	-5	-2	-1
19	-3	1	8	2	1	4	3	5	-2	-7	-3	2
20	10	-8	-7	-1	-5	2	-6	0	-3	3	6	-3
21	-4	-13	6	0	-1	-1	-2	3	5	1	-5	-9
22	-3	-6	-8	5	2	0	2	5	0	1	2	4
23	14	-3	7	2	-1	-2	1	2	1	5	0	-6
24	-6	5	5	-2	0	-4	-1	7	1	4	-8	4
25	-13	-8	16	1	2	0	3	0	-3	5	2	6
26	16	-8	-13	0	2	1	-3	0	3	6	2	5
27	5	5	-6	-4	0	-2	1	7	-1	-4	-8	4
28	7	-3	14	-2	-1	2	1	2	1	-6	0	5
29	-8	-6	-3	0	2	5	0	5	2	4	2	1
30	6	-13	-4	-1	-1	0	5	3	-2	-9	-5	1

4.6. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  і площини  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

№	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$l$	$m$	$n$	$A$	$B$	$C$	$D$
01	2	3	-1	-1	-1	4	1	2	3	-14
02	-1	3	-1	3	-4	5	1	2	-5	20
03	1	-5	1	-1	4	2	1	-3	7	-24
04	1	0	-3	1	0	2	2	-1	4	0
05	5	3	2	1	-1	0	3	1	-5	-12
06	-1	-2	3	-3	2	-2	1	3	-5	9
07	1	2	-1	-2	1	-1	1	-2	5	17
08	1	2	4	2	0	1	1	-2	4	-19
09	-2	1	-4	-1	1	-1	2	-1	3	23
10	-2	2	-3	1	0	0	2	-3	-5	-7
11	1	1	-2	2	-1	3	4	2	-1	-11
12	1	-1	1	1	0	-1	3	-2	-4	-8
13	-2	1	-3	-1	1	2	1	2	-1	-2
14	-3	2	-2	1	-5	3	5	-1	4	3
15	2	2	4	2	-1	3	1	3	5	-42
16	3	4	4	-1	5	2	7	1	4	-47
17	5	2	-4	-2	0	-1	2	-5	4	24
18	1	8	-5	8	-5	12	1	-2	-3	18
19	3	1	-5	1	-1	0	1	7	3	11
20	5	-3	1	-1	5	2	3	7	-5	-11
21	1	2	6	7	1	-1	4	1	-6	-5
22	3	-2	8	1	-1	0	5	9	4	-25
23	-2	-3	3	-5	1	4	-1	5	3	3
24	4	2	2	3	-1	2	5	3	1	-42
25	4	4	3	2	5	-1	4	1	7	-47
26	-4	2	5	-1	0	-2	4	-5	2	24
27	-5	8	1	12	-5	8	-3	-2	1	18
28	-5	1	3	0	-1	1	3	7	1	11
29	1	-3	5	2	5	-1	-5	7	3	-11
30	6	2	1	-1	1	7	6	-1	-4	5



#### 4.7. Розв'язати наступні задачі

7.1. Написати рівняння циліндричної поверхні, яка проходить через точки  $M_1(1; 0; -1)$ ,  $M_2(2; 0; 2)$ , якщо площини  $\pi_1 : x + 2y + z = 0$ ,  $\pi_2 : x - z = 0$  є її площинами симетрії, а пряма  $l = \pi_1 \cap \pi_2$  – її віссю симетрії.

7.2 – 7.4. Написати рівняння конуса обертання, який проходить через прямі:

$$l_1 : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2t, \\ z = -1 + 2t; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = t, \\ z = -1 + 2t; \end{cases} \quad l_3 : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 2t, \\ z = -1 - 2t. \end{cases}$$

7.5 – 7.7. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо рівняння трьох твірних її :

$$l_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = t, \\ z = t + 1; \end{cases} \quad l_3 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

7.8. Написати рівняння циліндра обертання, який проходить через точку  $M_0(1; -2; 1)$ , віссю якого є пряма:  $x = t$ ,  $y = 1 + 2t$ ,  $z = -3 - 2t$ .

7.9. Параболічний циліндр проходить через точки  $M_1(1, 1, 1)$ ,  $M_2(1, -1, 1)$ , його твірні паралельні прямій:  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = -2t$ , а площина  $x + y + z = 0$  є його площиною симетрії. Написати рівняння цього циліндра.

7.10 – 7.12. Написати рівняння циліндра, якщо  $\vec{a} = (5; 3; -2)$  напрямний вектор його твірних і

$$\text{рівняння напрямної: } 1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 - z^2 = 4, \\ x = 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0. \end{cases}$$

7.13 – 7.14. Написати рівняння конуса, описаного навколо сфери: а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;

б)  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

7.15. Конус заданий рівнянням  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Написати рівняння площини, яка проходить через точки  $M_1(0, -2, 2)$ ,  $M_2(-1, 0, 0)$  і перетинає даний конус по параболі.

7.16. Написати рівняння конуса з вершиною  $S(1; 0; -1)$ , який проходить через криву:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1. \end{cases}$$

7.17. В площині  $Oyz$  дано коло з центром в точці  $(0, 4, 0)$  і радіусом  $r = 1$ . Написати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання цього кола навколо осі  $Oz$ .

7.18. Коло, радіус якого  $r$ , розміщене на площині  $Oyz$  так, що дотикається до осі  $Oz$  в початку координат. Написати рівняння поверхні, утвореної в результаті обертання кола навколо осі  $Oz$ .

7.19. Записати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання параболі  $z^2 = 10y$ ,  $x = 0$  навколо осі  $Oz$ .

7.20 – 7.23. Записати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання навколо осі  $Oy$

кожної з наступних кривих, розміщених у площині: а) еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; б) гіперболи

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; в) гіперболи  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ; г) параболі  $x^2 = 2py$ .

7.24. Написати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання синусоїди  $z = \sin y$  навколо осі  $Oz$ .

**7.25.** Скласти рівняння круглого конуса, який проходить через всі три координатні осі.

**7.26.** Знайти геометричне місце прямих, які проходять через точку  $(3; 0; 5)$  і утворюють з площиною  $Oxy$  кут  $\pi/4$ .

**7.27.** Записати рівняння циліндра, твірною якого є коло  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$  і напрям твірної заданий відношенням  $m : n : p = 5 : 3 : 2$ .

**7.28 – 7.29.** Знайти рівняння циліндра, якщо він проходить через криву  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x + y + z + 2 = 0, \end{cases}$  а твірна його: 1) паралельна осі  $Ox$ ; 2) паралельна прямій  $x=y, z=c$ .

**7.30.** Напрямна циліндра задана рівняннями:  $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$  а твірна його перпендикулярна до площини напрямної. Записати рівняння циліндра.

#### 4.8. Розв'язати наступні задачі

**8.1.** Написати рівняння сфери, описаної навколо тетраедра з вершинами в точках  $A(2, 1, -1), B(0, 3, -1), C(0, 0, -3), D(0, -1, -1)$ .

**8.2.** Написати рівняння сфери, що дотикається до прямої  $x = 1 + 3t, y = -4 + 6t, z = 6 + 4t$  в точці  $M_1(1, -4, 6)$  і до прямої  $x = 4 + 2t, y = -3 + t, z = 2 - 6t$  в точці  $M_2(4, -3, 2)$ .

**8.3.** Написати рівняння сфери, вписаної в тетраедр з вершинами в точках  $S\left(-\frac{11}{3}, 4, -\frac{22}{3}\right), A(-2, 1, 1), B(-1, -4, -2), C\left(3, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

**8.4.** Дано вершини еліпсоїда  $A_1(8, 0, 0), A_2(-2, 0, 0)$ . Написати його рівняння, якщо в перетині його площиною  $Oyz$  отримується еліпс:  $x=0, \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ .

**8.5.** Дано рівняння еліпсоїда  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$ , прямої  $l: \begin{cases} 2x - y = 0, \\ z - 9 = 0 \end{cases}$  і точка  $M_0(-3, 1, 1)$ .

Написати рівняння тієї дотичної площини до еліпсоїда, яка проходить через пряму  $l$  і не перетинає відрізок  $OM_0$ .

**8.6.** Осі симетрії однопорожнинного гіперболоїда є осями ортонормованого репера. Написати рівняння цього гіперболоїда, якщо він проходить через криву  $\begin{cases} 25x^2 - 16z^2 = 144, \\ x = y \end{cases}$  і точку  $M_0(3, 4, 3)$ .

**8.7.** Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ , які проходять через точку  $M_0(5, 3, 2)$ .

**8.8.** Визначити вид перерізу двопорожнинного гіперболоїда, заданого рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  площиною  $\pi: Ax + By + Cz + d = 0$ .

**8.9.** Написати рівняння площини, яка паралельна даній площині  $\pi: x - y + z - 5 = 0$  і перетинає параболоїд  $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$  по двох прямолінійних твірних. Знайти рівняння цих твірних.

**8.10.** Знайти рівняння прямолінійних твірних параболоїда  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 2z$ , які паралельні площині  $6x + 4y - 8z + 1 = 0$ .

Визначити вид і розміщення поверхні, користуючись перетвореннями повороту і перенесення або групуванням членів в рівнянні поверхні:

**8.11.**  $z = 2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 1$ ;

**8.12.**  $z = x^2 + 3y^2 - 6y + 1$ ;

**8.13.**  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$ ;

**8.14.**  $z^2 = 3x + 4y + 5$ ;

**8.15.**  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0$ ;

**8.16.**  $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 14 = 0$ ;

**8.17.**  $3x^2 + 6x - 8y + 6z - 7 = 0$ ;

**8.18.**  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ ;

**8.19.**  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ ;

**8.20.**  $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$ ;

**8.21.**  $4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$ .

**8.22 – 8.24.** Визначити координати центра і довжину радіуса для кожної з наступних сферичних поверхонь:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10z + 22 = 0$ ; б)

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$ ; в)  $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 37 = 0$ .

**8.25.** Записати рівняння поверхні другого порядку, яка проходить через точки  $(0;0;0)$ ,  $(1;1;-1)$ ,  $(0;0;1)$ , для якої площини  $x + y + z = 0$ ,  $2x - y - z = 0$ ,  $y - z + 1 = 0$  є площинами симетрії.

Записати рівняння кругового конуса, який дотикається до площин  $Oxz$  і  $Oyz$  по прямих  $ox$  і  $Oy$ ?

**8.26.** Записати рівняння конічної поверхні, яка перетинає площину  $Oyz$  по колу  $x=0$ ,  $y^2 + z^2 = 2ry$ , а площину  $Oxz$  по параболі  $y=0$ ,  $z^2 - 2px = 0$ .

**8.27.** Записати рівняння поверхні другого порядку, якщо, вона перетинає площину  $Oxy$  по колу  $x^2 + y^2 - 12x - 18y + 32 = 0$ ,  $z = 0$ , а площини  $Oxz$  і  $Oyz$  по параболах, осі яких паралельні додатному напрямку осі  $Oz$ , причому параметр параболи, яка лежить в площині  $Oxz$ , рівний 1.

**8.28.** Написати рівняння сферичної поверхні з центром в точці  $C(3; -1; 6)$  і радіусом  $R = 7$ .

**8.29.** Через точку  $(2; 1; -1)$  провести таку хорду поверхні  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ , яка ділилася б в цій точці навпіл.

**8.30.** Через точку  $(5; 1; 2)$  провести пряму так, щоб вона перетнула поверхню  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ; тільки в одній точці.

#### 4.9. Розв'язати наступні задачі

Визначити вид і розміщення поверхні, користуючись перетвореннями повороту і перенесення або групуванням членів у рівнянні поверхні:

9.1.  $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$ ;

9.2.  $z = x^2 + 2xy + y^2 + 1$ ;

9.3.  $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$ ;

9.4.  $2xy + z^2 - 2z + 1 = 0$ ;

9.5.  $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$ ;

9.6.  $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2z + 1 = 0$ ;

9.7.  $2xy + 2x + 2y + 4z = 0$ ;

9.8.  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 4yz - 2x + 6y + 2z = 0$ ;

9.9.  $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$ ;

9.10.  $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ ;

9.11.  $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ .

Звести до канонічного виду рівняння поверхонь другого порядку і записати формули перетворення:

9.12.  $3x^2 + 2y - 4z = 0$ ;

9.13.  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 12 = 0$ ;

9.14.  $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 24 = 0$ ;

9.15.  $5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 8xy - 9 = 0$ ;

9.16.  $x^2 - 6y^2 + 2z^2 - 2x + 12y + 4z + 9 = 0$ ;

9.17.  $3x^2 - 2y^2 + 12x - 2y + 4z + 6 = 0$ ;

9.18.  $y^2 + 2z^2 - 4y + 12z + 10 = 0$ ;

9.19.  $2x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x + 6y + 16z - 1 = 0$ ;

9.20.  $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 8z + 13 = 0$ ;

9.21.  $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 12z + 2 = 0$ ;

9.22.  $x^2 - 2z^2 + 6x + 4y + 4z + 3 = 0$ ;

9.23.  $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ ;

9.24.  $x^2 - 3y^2 + 10x + 12y + 13 = 0$ ;

9.25.  $5x^2 + 10y^2 + 2z^2 - 40y + 50 = 0$ ;

9.26.  $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4x + 8y + 12z - 4 = 0$ ;

9.27.  $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 8x + 4y - 5 = 0$ ;

9.28.  $2xz + 4x + 6y + 8z - 2 = 0$ ;

9.29.  $6x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 6z - 27 = 0$ ;

9.30.  $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 36x + 36y - 18z - 18 = 0$ ;

9.31.  $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0$ ;

9.32.  $5y^2 - 2x + 10y - 4z + 1 = 0$ ;

9.33.  $3x^2 + 2yz - 6x + 4y - 4z + 1 = 0$ ;

9.34.  $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 8xz - 2yz + 4x - 6y + 8z - \frac{35}{3} = 0$ .