Міністерство освіти і науки України

Українська академія друкарства

Кафедра прикладної математики і фізики

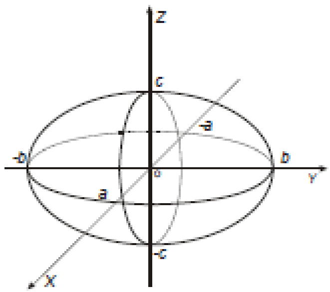
Коляда Р. В., Мельник О. М.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Ч. 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Методичні вказівки для студентів спеціальностей
122 ”Комп’ютерні науки”
126 “Інформаційні системи та технології” ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Львів − 2019

Коляда Р. В., Мельник О. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 4. Аналітична геометрія в просторі: методичні вказівки для студентів спеціальностей ”Комп’ютерні науки”, “Інформаційне системи і технології” ,– Львів, Укр. акад. друкарства, 2019. – 48 с.

Затверджено на засіданні кафедри
прикладної математики і фізики Української академії
друкарства (*протокол № 1 від 29 серпня 2019 р.*)

Відповідальний за випуск:
Піскозуб Й. З., канд. фіз.-мат. наук, доцент

4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

4.1. Вступ. Рівняння поверхні та лінії у просторі

Основним питанням в аналітичній геометрії на площині було питання про задання плоских ліній за допомогою рівнянь. У просторі $\mathbb{R}^3$ поряд з одновимірними образами (лініями) доводиться розглядати ще й двовимірні образи (поверхні).

Розглянемо деяке рівняння з трьома змінними $x,\ y,\ z$

$$F(x,\ y,\ z) = 0. \qquad (1)$$

Введемо у просторі прямокутну декартову систему координат. Числа $x,\ y,\ z$ будемо вважати координатами деякої точки $M(x;\ y;\ z)$ у цій системі. Для координат ($x,\ y,\ z$) одних точок рівняння (1) задовольняється, а для координат інших точок – ні. Розглянемо множину S всіх точок простору, координати яких задовольняють рівнянню (1). Ця множина точок є, взагалі кажучи, деякою поверхнею у просторі. Дійсно, розглянемо спочатку випадок, коли рівняння (1) можна розв'язати відносно z, тобто виразити z як функцію від x і y:

$$z = f(x,\ y) \qquad (2)$$

Покладемо $x = x_1$, $y = y_1$ і обчислимо значення $z_1 = f(x_1,\ y_1)$. Трійка чисел $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ є розв'язком рівняння (2).

Означення 1. Сукупність всіх пар чисел x і y, для яких $z = f(x,\ y)$ приймає дійсне значення, називається областю визначення, заданою рівнянням (2). Позначимо цю область через D.

Введемо прямокутну декартову систему координат (рис. 1) і розглянемо у площині xOy всі можливі точки $N(x;\ y;\ 0)$, координати x і y яких, як пари чисел, входять до області визначення D.

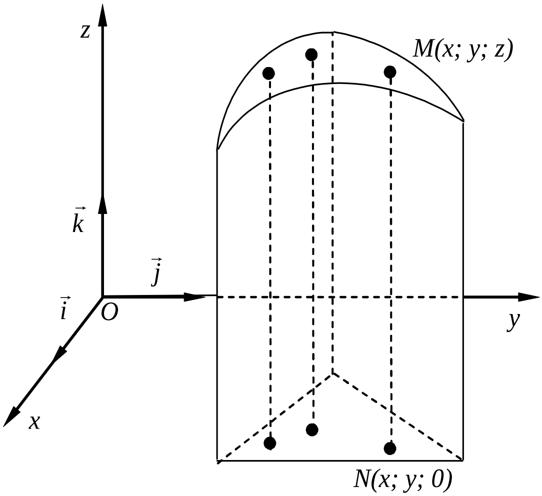


Рис. 1

Через кожну з цих точок проведемо перпендикуляр до площини xOy і відкладемо на ньому відрізок NM, що дорівнює (з врахуванням знаку) відповідному значенню z, обчисленому з рівняння (2).

Множина S всіх точок $M\left(x;\ y;\ f\left(x,\ y\right)\right)$ утворює деяку поверхню.

Означення 2. Якщо задано рівняння (1), то поверхнею, що визначається цим рівнянням, називається множина S всіх точок простору, координати яких задовольняють даному рівнянню.

Означення 3. Якщо задано деяку поверхню S у просторі, то рівнянням цієї поверхні називається таке рівняння (1), яке визначає поверхню, що співпадає з поверхнею S.

Означення 4. Поверхня називається алгебраїчною, якщо її рівняння (1) є алгебраїчним. Степінь рівняння алгебраїчної поверхні називається порядком цієї поверхні.

Вивчаючи рівняння $F(x, y) = 0$ на площині, ми переконались в існуванні особливих випадків, коли це рівняння визначає одну точку, сукупність ізольованих одна від одної точок чи не визначає жодного геометричного образу.

Аналогічні особливі випадки мають місце і для рівнянь вигляду (1): у деяких випадках це рівняння визначає криву у просторі або окрему точку цього простору, або сукупність ізольованих одна від одної точок, або у жодна точка $M(x; y; z)$ не задовольняє це рівняння.

4.2. Площина в просторі

4.2.1. Загальне рівняння площини

Нехай в просторі $\mathbb{R}^3$ у прямокутній системі координат $Oxyz$ площину π задано точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вектором нормалі $\vec{n} = (a; b; c)$. Якщо $M(x; y; z)$ довільна точка площини π, то вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Цей запис є рівнянням площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Після спрощення отримаємо рівняння загального вигляду $ax + by + cz + d = 0$.

Розглянемо частинні випадки загального рівняння площини:

1) d = 0. У цьому випадку рівняння набирає вигляду $ax + by + cz = 0$. Точка O (0, 0, 0) задовольняє це рівняння, тому площина проходить через початок системи координат.

2) Нехай один із коефіцієнтів при змінних дорівнює нулю. Припустимо c = 0, a ≠ 0, b ≠ 0, d ≠ 0. Тоді рівняння набирає вигляду $ax + by + d = 0$. Нормальний вектор $\vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$

перпендикулярний до осі *Oz*, оскільки його проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Отже, площина π паралельна цій осі. Якщо ще і d = 0, то площина $ax+by=0$ містить вісь *Oz*, тому що паралельна їй і проходить через початок системи координат.

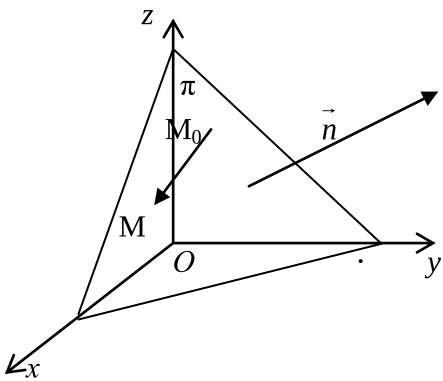


Рис. 2

3) Розглянемо тепер випадок, коли два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю. Нехай $a = b = 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Тоді площина $cz + d = 0$ згідно з попереднім паралельна відразу осей *Ox* і *Oy*, а це означає, що вона паралельна площині *Oxy* і, як наслідок, перпендикулярна до осі *Oz*. Якщо додатково і $d = 0$, то $z = 0$ − рівняння координатної площини *Oxy*. Аналогічно можна розглянути випадки $A \neq 0$, $B = C = 0$ і $B \neq 0$, $A = C = 0$.

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-3; 4; 5)$ перпендикулярно до осі *Oy*.

Розв'язання. Оскільки орт $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ перпендикулярний до шуканої площини (є нормаллю до неї), тому отримуємо рівняння площини $0\,(x+3)+1\,(y-4)+0\,(z-5)=0$, тобто $y=4$.

4.2.2. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина π задана трьома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, що не лежать на одній прямій. Якщо $M(x;y;z)$ – довільна точка площини π, то вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$ є компланарними.

З умови їх компланарності (мішаний добуток дорівнює нулю) отримаємо рівняння площини π:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Якщо площина відтинає на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно відрізки *a*, *b*, *c* (площина проходить через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, то її рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

Звідси $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – ***рівняння площини у відрізках на осях***.

Приклад. Побудувати площину за її рівнянням $3x-2y+4z-12=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння заданої площини у відрізках на осях $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1$ і побудуємо цю площину.

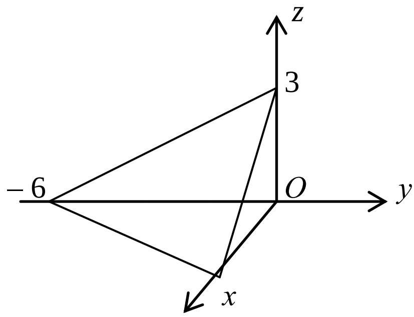


Рис. 3

4.2.3. Нормальне рівняння площини

Нехай площину π задано нормаллю $\overrightarrow{OP}$. Нормаллю площини називають перпендикуляр, опущений з початку координат на цю площину. Нехай задано довжину нормалі $\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$, а нормаль утворює кути α, β, γ, відповідно з осями $Ox,\ Oy,\ Oz$.

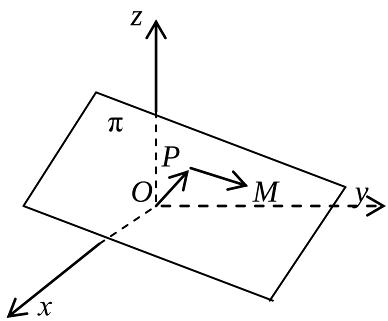


Рис. 4

Відповідні координати вектора $\overrightarrow{OP}$ і точки $P(p\cos\alpha; p\cos\beta; p\cos\gamma)$ співпадають, а вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{MP}$ є перпендикулярними (їхній скалярний добуток дорівнює нулю), де $M(x;y;z)$ – довільна точка площини π. Отримуємо рівняння

$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\cos\beta(y - p\cos\beta) + p\cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0.$$

Після спрощення отримаємо рівняння

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0,$$

але оскільки $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то ***нормальне рівняння площини*** π приймає вигляд

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,\ p > 0.$$

У нормальному рівнянні всі коефіцієнти мають геометричний зміст: коефіцієнти при *x*, *y* та *z* є напрямними косинусами будь-якого вектора, перпендикулярного до площини, величина *p* чисельно дорівнює відстані площини до початку координат.

Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду

Нехай задано загальне рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$.

Перетворимо це рівняння до нормального, помноживши обидві його частини на таке число $m \neq 0$ $amx + bmy + cmz + dm = 0$, щоб виконувалися умови нормальності рівняння: $dm < 0$, і $(am)^2 + (bm)^2 + (cm)^2 = 1$. Звідки отримуємо нормуючий множник $m = \dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, його знак вибираємо таким, щоб у рівнянні $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ було $p > 0$

4.2.4. Кут між двома площинами

Нехай дві площини π_1 π_2 задані відповідно загальними рівняннями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ – відповідні нормальні вектори цих площин. Двогранний кут між двома площинами вимірюється відповідним лінійним кутом, який дорівнює куту із взаємно перпендикулярними сторонами і визначається кутом між нормальними векторами заданих площин

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Якщо площини π_1 і π_2 паралельні, то їхні нормальні вектори паралельні, тому $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ є умовою паралельності площин.

Якщо площини π_1 і π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток відповідних нормальних векторів цих площин дорівнює нулю, тому $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ є умовою перпендикулярності заданих площин.

Приклад. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;-1;2)$ і $M_2(3;0;-3)$ паралельно до вектора $\vec{a}(2;1;-1)$.

Розв'язання. Нормальний вектор площини перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{M_1M_2} = (2;1;-5)$ і $\vec{a}(2;1;-1)$. Тому

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j}.$$

Тоді рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;-1;2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (4;-8;0)$ має вигляд $4(x-1) - 8(y+1) + 0(z-2) = 0$, тобто $x - 2y + 3 = 0$.

4.2.5. Відстань від точки до площини

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $ax + by + cz + d = 0$ обчислюється за формулою $d = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

4.3. Пряма лінія в просторі

4.3.1. Різні види рівняння прямої в просторі

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано пряму точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$, тоді $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, оскільки вектори $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ паралельні. Отриману рівність називають ***канонічним рівняння прямої в просторі***.

Поклавши $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$ (t – параметр), отримаємо ***параметричне рівняння прямої в просторі***

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ випливає з канонічного рівняння прямої, прийнявши вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ за напрямний.

Пряму в просторі можна задати рівняннями двох непаралельних площин, які перетинаються по цій прямій

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Цю систему рівнянь називають **загальним рівнянням прямої**.

Координати нормальних векторів $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ цих площин не повинні бути пропорційними, Нехай $\dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, зведемо його до канонічного рівняння площини.

Визначимо координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що лежить на заданій прямій, поклавши довільно $x = x_0$ і визначивши інші її координати із системи рівнянь

$$\begin{cases} b_1 y + c_1 z = -a_1 x - d_1, \\ b_2 y + c_2 z = -a_2 x - d_2. \end{cases}$$

Координати напрямного вектора знаходимо з векторного добутку нормальних векторів заданих площин

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{n_1} \perp \vec{s} \perp \pi_1, \quad \overrightarrow{n_2} \perp \vec{s} \perp \pi_2.$$

Приклад. Звести рівняння прямої, заданої перетином двох площин $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. Знайдемо точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що лежить на заданій прямій. Нехай $x_0 = 0$, тоді з системи рівнянь

$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ знаходимо $y = -1$, $z = -2$. Отже,

$$M_0(0; -1; -2), \quad \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Шукане канонічне рівняння отримує вигляд

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{-3}.$$

4.3.2. Кут між двома прямими в просторі. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задані в канонічному вигляді

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

$\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$ – їх відповідні напрямні вектори. Зрозуміло, що

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Співвідношення $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ є ***умовою паралельності***, а $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ – умовою ***перпендикулярності прямих в просторі.***

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (рис. 4). Відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Доходимо висновку, що шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

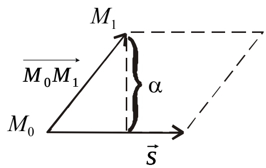


Рис. 5

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Якщо дві прямі у просторі перетинаються то вектори $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)$ розміщені в одній площині. *Умова перетину двох прямих у просторі* − $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

4.3.3. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Нехай задано пряму $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ і площину $Ax + By + \; + Cz + D = 0$ у просторі. Якщо $\dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$, то пряма перпендикулярна до площини, а коли $Am + Bn + Cp = 0$, пряма паралельна площині.

Нехай $Am + Bn + Cp \neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої $x = x_0 + mt,\;\; y = y_0 + nt,\;\; z = z_0 + pt$
і підставимо значення *x*, *y*, *z* у рівняння площини:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Звідси, використовуючи умову непаралельності, знайдемо значення параметра $t^* = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$.

Координати точки перетину:

$$x = x_0 + mt^*,\;\; y = y_0 + nt^*,\;\; z = z_0 + pt^*.$$

Знайдемо кут між площиною і прямою.

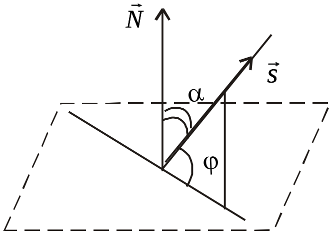


Рис. 6

Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис.6). Вектор $\vec{n} = (a, b, c)$ − перпендикулярний до площини, а кут α, який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90°. Тобто α + φ = 90°. Знайдемо кут α як кут між двома векторами $\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$.

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos\left(90^\circ - \phi\right) = \sin\phi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos\left(90^\circ - \phi\right) = -\sin\phi$, у будь-якому разі $\sin\varphi = |\cos\alpha|$. Отже, $\sin\phi = \frac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

4.4. Приклади розв'язання задач (пряма і площина в просторі)

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки

$M_1\,(1, -1, 0)$, $M_2\,(2, 1, -3)$, $M_3\,(-1, 0, 1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площин, які проходять, скажімо, через точку M_1 $\quad A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0$.

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежать у шуканій площині, тому їхній векторний добуток буде перпендикулярним до шуканої площини. Координати векторного добутку вважатимемо координатами вектора нормалі до площини:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Отже, $A = 5$; $B = 5$; $C = 5$ і шукане рівняння набирає вигляду $5\,(x-1) + 5\,(y+1) + 5\,z = 0$, тобто $x + y + z = 0$.

2. Записати рівняння площин, що проходять:

1) паралельно площині Oxz і через точку $(2, -5, 3)$;

2) через вісь Oz і точку $(-3, 1, -2)$;

3) паралельно осі Ox і через точки $(4, 0, -2)$ і $(5, 1, 7)$.

Розв'язання. 1) Рівняння шуканої площини $By + D = 0$ або $y = -\dfrac{D}{B}$. Точка $(2, -5, 3)$ лежить у цій площині, тому $-5 = -\dfrac{D}{B}$; остаточно маємо: $y = -5$, або $y + 5 = 0$.

2) Рівняння шуканої площини $Ax + By = 0$ або $x + \dfrac{B}{A}y = 0$. Підставимо координати точки $(-3, 1, -2)$ у це рівняння $-3 + \dfrac{B}{A} = 0$, $\dfrac{B}{A} = 3$. Остаточно рівняння шуканої площини набирає вигляду $x + 3y = 0$.

3) Рівняння площини, паралельної осі Ox, має вигляд: $By + Cz + D = 0$. Підставляючи в нього почергово координати точок $(4, 0, -2)$ і $(5, 1, 7)$, дістаємо систему

$$\begin{cases} -2C + D = 0, \\ B + 7C + D = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C} = 2, \\ \dfrac{B}{C} + \dfrac{D}{C} = -7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C} = 2, \\ \dfrac{B}{C} = -9. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $9y - z - 2 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $(0, 0, 1)$ і $(3, 0, 0)$ і утворює кут $\dfrac{\pi}{3}$ з площиною Oxy.

Розв'язання. Запишемо рівняння шуканої площини у загальному вигляді: $Ax + By + Cz + D = 0$, рівняння площини Oxy: $z = 0$, її нормальний вектор $\vec{N}_1 = (0, 0, 1)$. Підставляючи координати точок, що лежать у шуканій площині, дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C+D=0, \\ 3A+D=0, \\ \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C}=-1, \\ \dfrac{A}{C}=-\dfrac{1}{3}, \\ \left(\dfrac{A}{C}\right)^2+\left(\dfrac{B}{C}\right)^2+1=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C}=-1, \\ \dfrac{A}{C}=-\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{B}{C}=\dfrac{\pm\sqrt{26}}{3}. \end{cases}$$

Підставимо в рівняння знайдені значення і після перетворень отримаємо рівняння шуканої площини $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$.

4. Через точку *M* (– 5, 16, 12) провести дві площини: одна з них проходить через вісь *Ox*, друга — через вісь *Oy*. Знайти кут між цими площинами.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через вісь *Ox*: $B_1y+C_1z=0$, що проходить через вісь *Oy*: $A_2x+C_2z=0$. З умови проходження їх через точку *M* маємо: $3y-4z=0$ і $12x+5z=0$. З формули (2.28) дістаємо:

$$\cos\varphi=\frac{-20}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{144+25}}=-\frac{4}{13},\quad \varphi=\pi-\arccos\frac{4}{13}.$$

5. Знайти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0, \\ 2x+y-3z-1=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо: $x=10z-9$; $y=19-17z$. Покладаючи $z_0=1$, дістаємо $x_0=1$, $y_0=2$. Точка *A* (1, 2, 1) належить шуканій прямій. Обчислюємо компоненти напрямного вектора $m=-10$, $n=17$, $p=-1$. Отже, рівняння шуканої прямої має вигляд: $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-2}{-1}$.

6. У площині *Oxz* знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{1}.$$

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор шуканої прямої. Оскільки пряма лежить у площині *Oxz*, її напрямний вектор перпендикулярний до осі *Oy,* тобто $\vec{s}=(m,\ 0,\ p)$. З умови перпендикулярності маємо $3m + p = 0$, отже, $m = 1$, $p = -3$. Шукане рівняння має вигляд: $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$.

7. Знайти проекцію точки *A* (4, –3, 1) на площину $x + 2y - z - 3 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння перпендикуляра, опущеного з точки *A* на площину. Вектор $\vec{N}=(1,\ 2,\ -1)$ перпендикулярний до площини, тому його можна взяти за напрямний вектор перпендикуляра. Маємо рівняння перпендикуляра: $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$. Знайдемо тепер точку перетину цього перпендикуляра з площиною. Перейдемо до параметричного рівняння $x = 4 + t$; $y = -3 + 2t$; $z = 1 - t$ і підставимо в рівняння площини $4+t+2(-3+2t)-(1-t)-3=0$.

Отже, $t^{*}=1$. Підставляємо це значення t^{*} в параметричне рівняння дістаємо координати проекції (5, – 1, 0).

8. Знайти відстань точки *M* (7, 9, 7) до прямої $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$.

Розв'язання. Для знаходження відстані скористаємось відповідною формулою. Точка *A* (2, 1, 0) лежить на даній прямій; $\overrightarrow{AM}=(5, 8, 7)$. Далі маємо:

$$\overrightarrow{AM}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 8 & 7\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=-5\vec{i}+18\vec{j}-17\vec{k};\quad \left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{s}\right|=\sqrt{638}.$$

$$|\vec{s}|=\sqrt{29}\ \ d=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\sqrt{22}.$$

9. Обчислити відстань між прямими

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2} \text{ і } \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}.$$

Розв'язання. Відстань між двома прямими обчислимо як відстань від першої з прямих до площини, яка паралельна цій прямій і проходить через другу пряму. Нехай $Ax+By+Cz+D=0$ – шукана площина, тоді отримуємо:

$$\begin{cases} 4A-B-7C+D=0, \\ 8A-3B+3C=0, \\ 4A-3B+2C=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3, \\ B=-4, \\ C=-12, \\ D=-100. \end{cases}$$

Рівняння площини має вигляд $3x-4y-12z-100=0$. Відстань від точки (– 3, 6, 3) до площини знайдемо за відомою формулою: $d=\dfrac{|3(-3)-4\cdot 6-12\cdot 3-100|}{\sqrt{9+16+144}}=13.$

10. Знайти умову перетину двох прямих у просторі.

Розв'язання. Нехай рівняння прямих задано в канонічній формі $\dfrac{x+x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x+x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$.

Прямі будуть перетинатися тоді і тільки тоді, коли вони лежать в одній площині і непаралельні. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1)$, $\vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$. Умовою того, що прямі лежать у одній площині, є компланарність цих векторів. Звідси випливає умова перетину двох прямих у просторі:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

4. 5. Завдання для самостійної роботи

1. Записати рівняння площини, паралельної площині Oxy, що проходить через точку (2, – 5, 3). *Відповідь.* $z+3=0$.

2. Скласти рівняння площини, якщо відстань її від трьох точок A (6, 1, – 1), B (0, 5, 4) і C (5, 2, 0) дорівнює відповідно 1, 2, 0.
Відповідь. $x + 2y + 2z - 9 = 0$ і $y - 2 = 0$.

3. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від двох площин:
$x + 4y - 3z - 2 = 0$ і $5x + z + 8 = 0$.
Відповідь. M_1 (0, 0, 3), M_2 (0, 0, $-\frac{5}{2}$).

4. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x+2y-9z+121=0$. *Відповідь.* (– 12; – 4; 18).

5. Дано дві точки A(1; 3; – 2), B(7; – 4; 4). Записати рівняння площини, що проходить через точку B перпендикулярно до $\vec{AB}$ і знайти її відстань від точки A.
Відповідь. $6x-7y+6z-94=0$; 11.

6. Через вісь Oz провести площину, що утворює кут $60°$ з площиною $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$.
Відповідь. $x+3y=0$; $3x-y=0$.

7. На відстані трьох одиниць від площини $3x-6y-2z+14=0$ провести паралельну їй площину.
Відповідь. $3x-6y-2z+35=0$.

8. Через точку (2, – 5, 3) провести пряму, паралельну прямій
$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$ *Відповідь.* $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$.

9. Визначити кут між двома прямими
$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 4x+y-6z=2 \\ y-3z=-2. \end{cases}$ *Відповідь.* $\cos\alpha=\frac{98}{195}$.

10. З усіх прямих, що перетинають дві прямі:

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-10}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$, знайти ту, яка паралельна прямій $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$. *Відповідь.* $\frac{x}{8}=\frac{y+8}{7}=\frac{z+9}{1}$.

11. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

Відповідь. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

12. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Відповідь. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$.

13. Чи лежить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ у площині $4x+3y-z+8=0$?

14. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-3}$ на площину $x-y+3z+8=0$. *Відповідь.* $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

15. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки (3, 2, 6). *Відповідь.* (3; – 1; 0).

16. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, що не перетинаються $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

Відповідь. $d=7$.

17. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(3;\ 1;\ -2)$ і через пряму $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Відповідь. $8x-9y-22z-59=0$.

18. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $A(-3;\ 2;\ 5)$ на площини $4x+y-3z+13=0$ та $x-2y+z-11=0$. *Відповідь.* $4x+5y-2z=0$.

19. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4;\ -3;\ 1)$ і паралельна до прямих: $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-3}$ і $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{2}$. *Відповідь.* $16x-27y+14z-159=0$.

20. Через точку $A(1;\ 0;\ 7)$ паралельно площині $2x-y+2z=15$ провести пряму так, щоб вона перетинала пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{1}$. *Відповідь.* $\dfrac{x-1}{68}=\dfrac{y}{70}=\dfrac{z-7}{-67}$.

21. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $K(2;-1;4)$ і $L(3;2,-1)$ перпендикулярно до площини $x+y+2z-3=0$.

Відповідь. $11x-7y-2z-21=0$.

22. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;-1,2)$ паралельно до прямої $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Відповідь. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$.

23. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $K(1;4;1)$ і пряму $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$. *Відп.* $2x-z=1$.

4.6. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору $\mathbb{R}^3$, прямокутні координати яких задовольняють рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (1)$$

де принаймні один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ відмінний від нуля.

Записане рівняння може задавати:

1) порожню множину; 2) точку;
3) пару площин, що перетинаються;
4) пару паралельних площин;
5) циліндри; 6) конус;
7) еліпсоїд; 8) гіперболоїди;
9) параболоїди.

Розглянемо геометричні образи алгебраїчних рівнянь другого порядку в просторовій декартовій системі координат.

4.6.1. Рівняння циліндричної поверхні з твірними, паралельними одній з координатних осей

Означення 1. Поверхня називається циліндричною, якщо її можна утворити переміщенням прямої паралельно самій собі вздовж деякої лінії l. Ця лінія l називається ***напрямною*** циліндричної поверхні, а всі можливі положення прямої, що рухається – ***твірними*** цієї поверхні.

Розглянемо частинний випадок, коли рівняння $F(x, y, z) = 0$ не містить однієї з координат. Нехай, наприклад, дано рівняння $F(x, y) = 0$. Особливістю рівняння (1) є те, що ним встановлюється зв'язок лише між першими двома координатами. Третя координата може приймати довільні значення, які не залежать від значень перших двох координат.

Наприклад, якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ задовольняє рівнянню (1), то точки з координатами $(x_0; y_0; 1)$, $(x_0; y_0; 15)$ і, взагалі, $(x_0; y_0; z)$ також задовольняють рівнянню (1) незалежно від z. Геометрично це означає, що всі точки перпендикуляра до площини xOy, проведеного через точку $M_0(x_0; y_0; 0)$.
(рис. 2), задовольняють рівнянню (1). Ці міркування формують уяву про поверхню (1) як про циліндричну поверхню.

Теорема. Якщо рівняння з двома змінними визначає у просторі деяку поверхню, то ця поверхня циліндрична.

Доведення. Нехай дано рівняння (1) $F(x, y) = 0$, яке на площині xOy у деякій декартовій прямокутній системі координат визначає лінію l. Розглянемо циліндричну поверхню S, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною S є лінія l (рис. 1). Нехай $M(x_0; y_0; z_0)$ – довільна точка, а $N(x_0; y_0; 0)$ – її проекція на площину xOy. Якщо M належить S, то N належить l, і координати точки N задовольняють заданому рівнянню (1): $F(x_0, y_0) = 0$. Але тоді цьому рівнянню задовольняють і числа x_0, y_0, z_0, оскільки $F(x, y)$ не залежить від z. Отже, якщо точка M лежить на поверхні S, то її координати задовольняють рівнянню (1). Навпаки, нехай координати точки $M(x_0; y_0; z_0)$ задовольняють рівнянню (1). Тоді цьому рівнянню задовольняють і координати точки $N(x_0; y_0; 0)$ – проекції точки M на площину xOy. Тому точка N лежить на лінії l, а точка M – на поверхні S. Якщо точка M знаходиться поза поверхнею S, то N не лежить на l і координати точки M не задовольняють рівнянню (1). Отже, рівняння (1) визначає у просторі циліндричну поверхню S. Теорему доведено.

Аналогічними рівняннями циліндричних поверхонь з твірними, паралельними осі Oy і осі Oz, є відповідно рівняння

$$F(x,\ z)=0 \tag{2}$$

$$F(y,\ z)=0 \tag{3}$$

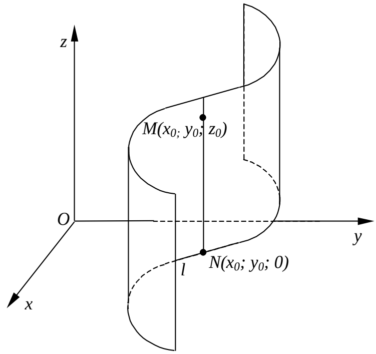


Рис. 7

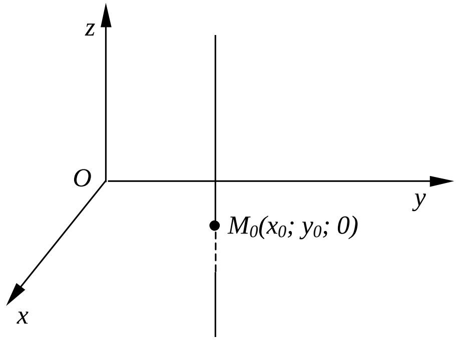


Рис. 8

Якщо за напрямні циліндричних поверхонь брати різні криві другого порядку, які лежать у площині xOy, а за напрям твірних вибрати напрям осі Oz, то отримаємо наступні циліндричні поверхні (віссю циліндрів є вісь Oz) та їх рівняння:

Еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$..

Гіперболічний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Параболічний циліндр $y=ax^2$

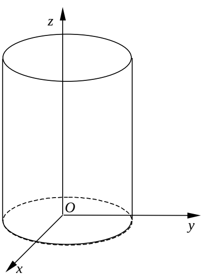


Рис. 9

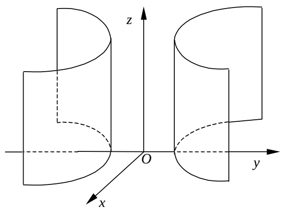


Рис. 10

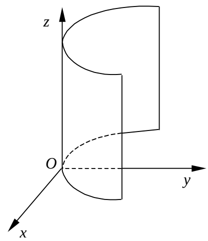


Рис. 11

Частинним випадком еліптичного циліндра є круговий циліндр з рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$. Віссю цього циліндра є вісь Oz.

Всі ці поверхні називаються ***циліндрами другого порядку***, оскільки їх рівняння є рівняннями другого степеня відносно змінних координат. Різних типів циліндрів другого порядку стільки ж, скільки і різних типів кривих другого порядку.

Аналогічно, можна записати рівняння циліндрів другого порядку з осями Ox та Oy. Рекомендується зробити це самостійно.

4.6.2. Конічні поверхні

Конічною називається поверхня, яка утворена рухом прямої в просторі, що проходить через дану точку C , перетинаючи деяку криву γ.

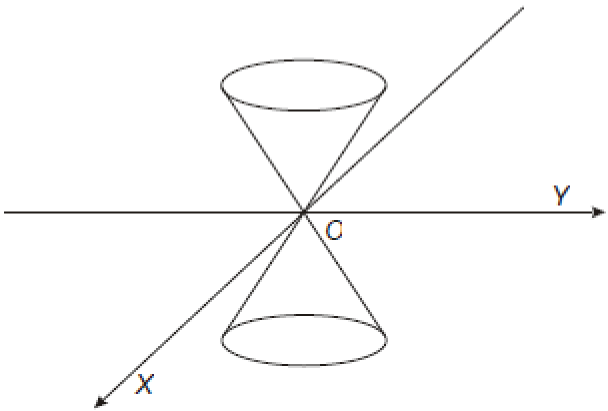


Рис. 12

Точка C − називається вершиною конічної поверхні, а крива γ − напрямною.

Канонічне рівняння конічної поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Конічна поверхня в загальному випадку задається рівнянням напрямної $\gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ і координатами вершини $C(a,b,c)$. Щоб записати рівняння конічної поверхні, скористаємось схемою, розглянутою в аналогічному випадку для циліндричної поверхні. Кожен пункт виконується в повній аналогії, різниця лише в тому, що рівняння твірної конічної поверхні записане через дві точки C і M. Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0,\\ \dfrac{x-a}{x_0-a}=\dfrac{y-b}{y_0-b}=\dfrac{z-c}{z_0-c}=t.\end{cases}$$

Загальне рівняння конічної поверхні

Теорема 2. Якщо загальне однорідне рівняння другого степеня

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fzy=0$$

задає дійсну поверхню, що не розпадається, то це конічна поверхня з вершиною в початку координат.

Поверхні обертання

Поверхня, утворена обертанням кривої γ навколо прямої $\mathcal{L}$, що знаходиться з γ в одній площині, називається ***поверхнею обертання.***

Початкове положення кривої γ називається ***початковим меридіаном***, а пряма $\mathcal{L}$ − ***віссю обертання***.

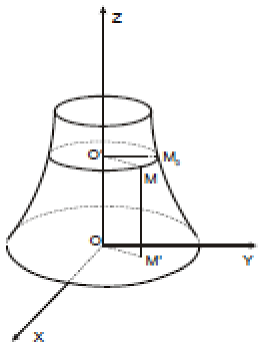


Рис. 13

На рисунку 13 початковий меридіан проходить через точку M_0 , лежить в площині yOz , вісь обертання – вісь Oz.

4.6.3. Рівняння лінії у просторі

В аналітичній геометрії на площині одне рівняння з двома змінними x і y визначає множину точок площини, координати $(x;\, y)$ яких задовольняють цьому рівнянню, тобто геометричне місце точок, яке є лінією. Два сумісних рівняння з двома змінними визначають одну чи декілька точок площини.

У просторі ситуація дещо інша, оскільки розглядаються рівняння з трьома змінними. Одне рівняння з трьома змінними x, y, z визначає множину точок простору, координати $(x;\, y;\, z)$ яких задовольняють цьому рівнянню, тобто геометричне місце точок, яке є поверхнею.

Якщо задано систему двох сумісних рівнянь

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, z) = 0 \\ \Phi(x,\, y,\, z) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

то у просторі існує геометричне місце точок, координати яких задовольняють обом рівнянням. Це геометричне місце бідніше своїми точками, ніж поверхня, оскільки дві умови, накладені на координати, є більш сильним обмеженням, ніж одна.

Рівняння $F(x, y, z)=0$ зображається деякою поверхнею. Всі точки, координати яких задовольняють це рівняння, лежать на цій поверхні.

Рівняння $\Phi(x, y, z)=0$ зображається іншою поверхнею. Всі точки, координати яких задовольняють це рівняння, лежать на цій іншій поверхні.

Ми шукаємо точки, координати яких задовольняють системі рівнянь. Такі точки лежать одночасно на обох поверхнях, тобто на лінії перетину цих поверхонь.
Отже, приходимо до такого означення.

Означення. Рівнянням лінії у просторі є система (4) двох рівнянь з трьома змінними, якій задовольняють координати всіх точок даної лінії і тільки цих точок, тобто координати точок, які не лежать на даній лінії, не задовольняють обом рівнянням системи (1) одночасно. Лінія, яка зображає пару рівнянь, є лінією перетину поверхонь, які зображають кожне з цих двох рівнянь окремо.

Приклад 1. Знайти рівняння координатних осей.

Розв'язання. У всіх точок осі Oz і тільки у них координати x і y дорівнюють нулю. Тому рівнянням осі Oz є система

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Перше з рівнянь (2) є рівнянням площини yOz, а друге – площини xOz. Лінія перетину цих площин і є віссю Oz. Системи $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ є рівняннями координатних осей Ox і Oy.

Приклад 2. У просторі рівняння $x^2 + y^2 = R^2$ визначає круговий циліндр з твірними, паралельними осі Oz. Написати рівняння напрямної, яка лежить у площині xOy.

Розв'язання. Напрямною кругового циліндра, яка лежить у площині xOy, є коло з рівнянням $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0. \end{cases}$ Важливо відмітити, що в той час, як пара рівнянь повністю визначає деяку лінію, обернене твердження є хибним: якщо задано лінію у просторі і потрібно знайти її рівняння, то це можна зробити нескінченною кількістю способів, оскільки існують різні пари поверхонь, що перетинаються по одній і тій же лінії.

Щоб переконатися у цьому, повернемося до системи (4), яка визначає деяку лінію. Складемо рівняння

$$\lambda F(x, y, z) + \mu \Phi(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

де λ і μ – довільні дійсні числа, не рівні одночасно нулю ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$).

Рівняння (5) є рівнянням поверхні. Оскільки координати довільної точки, що лежить на лінії, задовольняють одночасно рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$, то вони будуть задовольняти і рівнянню (5) для довільних значень λ і μ. Для різних значень λ і μ рівняння (5) буде визначати різні поверхні, кожна з яких проходить через лінію (4). Дану лінію можна задати рівняннями будь-яких двох поверхонь, що проходять через неї.

4.7. Приклади розв'язання задач (поверхні другого порядку)

1. Дослідити поверхню $3x^2 - 2y^2 - 6 = 0$.

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння даної поверхні $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$. Скористаємось методом перерізів. При перетині поверхні площиною *yOz*: $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 = -3 \end{cases}$, очевидно не отримуємо точок. Перетинаємо площиною, паралельною площині *yOz*, тобто $x = \pm h$ отримаємо $\begin{cases} x = \pm h, \\ 2y^2 = 3x^2 - 6. \end{cases}$ Звідки $y^2 = \frac{3h^2 - 6}{2} = b$, $y = \pm\sqrt{b}$. Маємо дві прямі, паралельні осі *Oz*: $y = \sqrt{b}$ та $y = -\sqrt{b}$. При перетині поверхні площиною *xOz* матимемо $\begin{cases} y = 0, \\ x^2 = 2. \end{cases}$ Звідси $x = \sqrt{2}$ або $x = -\sqrt{2}$ – дві прямі, паралельні осі *Oz*.

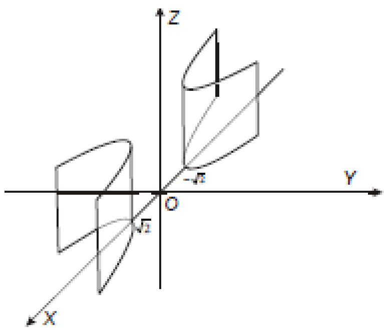


Рис. 14

Перетнемо площиною *xOy*. Отримаємо: $z = 0$, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$. Тому дане рівняння задає гіперболічний циліндр.

2. Дослідити поверхню $y^2-2y-2x+3=0$.

Розв'язання. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді $(y-2)^2=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. Це рівняння з двома змінними задає циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі *Oz*, а напрямною є крива з рівнянням $(y-2)^2=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ в площині *xOy*.

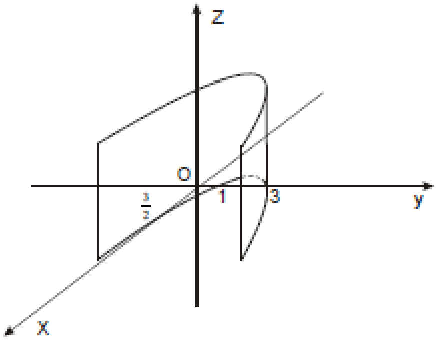


Рис. 15

Для виконання рисунка спочатку зобразимо в площині *xOy* параболу, задану рівнянням $(y-2)^2=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, а тоді таку ж саму параболу в будь-якій площині, паралельній *xOy* (паралельно переносимо вздовж осі *Oz*) і через декілька відповідних точок цих двох парабол проводимо прямі, паралельні осі *Oz*. Це − параболічний циліндр.

3. Дослідити поверхню $3x^2+2y^2-6z^2=0$ методом перерізів.

Розв'язання. Міркування аналогічні до проведених вище, при розв'язанні попередньої задачі (рис.16) :

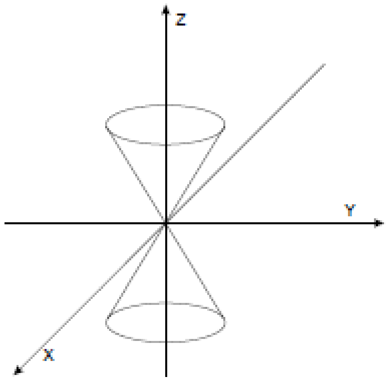


Рис. 16

1. $\begin{cases} z = 0, \\ 3x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$ – точка $(0;0)$.

2. $\begin{cases} z = \pm h, \\ 3x^2 + 2y^2 - 6h^2 = 0 \end{cases}$ – еліпс.

3. $\begin{cases} x = 0, \\ 2y^2 - 6z^2 = 0 \end{cases}$ – дві прямі $y = \sqrt{3} \cdot z$, $y = -\sqrt{3} \cdot z$.

4. $\begin{cases} y = 0, \\ 3x^2 - 6z^2 = 0 \end{cases}$ – дві прямі.

Отже, дане рівняння задає конічну поверхню.

4. Дослідити поверхню, задану рівнянням: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Розв'язання. Дослідимо методом перерізів, перетинаючи поверхню координатними площинами:

1) $x = 0$, тоді в площині yOz отримаємо:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - z^2 = 0; \end{cases}$$

$(y - z)(y + x) = 0$ – дві прямі: $L_1 : y - z = 0,$ $L_2 : y + z = 0.$

2) В площині xOy: $\gamma_2 : \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ − початок координат. Не маємо уявлення про поверхню.

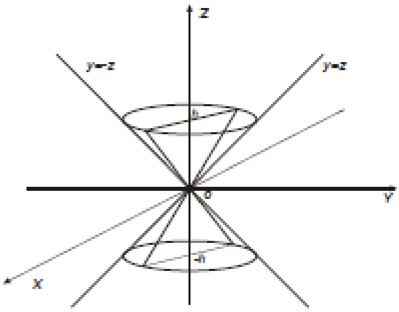


Рис. 17

3) Перетнемо поверхню площинами, паралельними площині xOy.

Отримаємо перерізи $\begin{cases} z = \pm h, \\ x^2 + y^2 = h^2 \end{cases}$ − це кола.

4) При перетині профільною площиною xOz, матимемо: $\gamma_3 : \begin{cases} y = 0, \\ x^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ − дві прямі. Отже, дане рівняння задає конус.

5. Побудувати зображення циліндричної поверхні, заданої рівнянням $x - y^2 + 4 = 0$.

Розв'язання. Рівняння з двома змінними x і y визначає циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі Oz . За напрямну можна взяти лінію перетину поверхні з площиною xOy. Почнемо з побудови напрямної лінії, яка задається системою рівнянь: $\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ Рівняння $x - y^2 + 4 = 0$ можна звести до канонічного вигляду за допомогою паралельного перенесення $\begin{cases} x = x' - 4, \\ y = y', \\ z = z', \end{cases}$ при якому початок координат переходить у точку $O'(-4;\ 0;\ 0)$. В нових координатах отримуємо систему рівнянь $\begin{cases} (y')^2 = x', \\ z' = 0. \end{cases}$ Така система рівнянь визначає параболу, вершина якої розміщена в точці O', а вісь напрямлена по осі Ox', яка співпадає з віссю Ox. Для уточнення рисунку корисно побудувати точки перетину цієї параболи з віссю Oy. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ отримаємо $x = 0,\ y = \pm\sqrt{2},\ z = 0.$ Позначимо на рисунку точки (0; 2; −2) і (0; −2; 0) проведемо через них напрямну параболу. Щоб зобразити на рисунку циліндричну поверхню, побудуємо ще однупараболу, яка отримується із побудованої в площині хоу, паралельним перенесенням вздовж осі Oz . Проведемо декілька твірних, паралельних до осі Oz, з'єднуючи відповідні точки цих двох парабол.

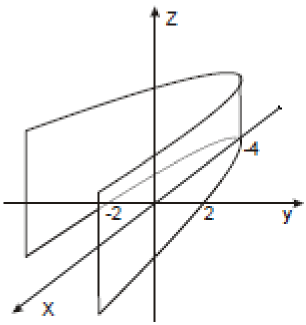


Рис. 18

6. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням синусоїди $z = \sin y$ навколо осі Oz.

Розв'язання: За правилом: замість змінної y підставимо $\sqrt{x^2 + y^2}$. Отже, рівняння поверхні обертання $z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

7. Скласти рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною є лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ з площиною $x + y + z = 1$.

Розв'язання. Рівняння даної циліндричної поверхні можна записати у вигляді: $f(x, y) = 0$, якщо система рівнянь $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ задає напрямну циліндра, що лежить в площині xOy. Спроектуємо лінію перетину $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ на площину xOy. Ця проекція відшукується виключенням z.

Знайшовши із другого рівняння системи z і підставивши цей вираз у перше рівняння системи, отримаємо $x^2 + y^2 + (1 - x - 9)^2 = 9$. Шукана напрямна задається системою рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - x - y = 4, \\ z = 0, \end{cases}$ а рівняння циліндричної поверхні має вигляд $x^2 + y^2 + xy - x - y = 4$.

4.8. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Сфера

Геометричне місце точок простору, рівновіддалених від даної точки $C(a, b, c)$ називається ***сферою*** і має рівняння

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

де R – відстань від кожної точки сфери до центра – радіус.

4.8.1. Еліпсоїди

Еліпсоїд обертання

Еліпсоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням еліпса навколо однієї із своїх осей (рис.3.20).

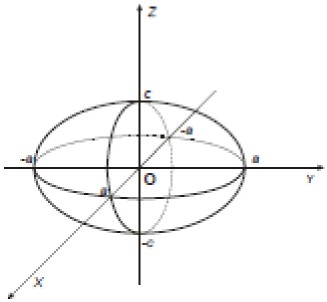


Рис. 19

Якщо еліпс знаходиться в площині xOz, тоді його рівняння:

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Обертаючись навколо Oz, еліпс утворить поверхню обертання, рівняння якої запишемо, (замість змінної x підставимо $\sqrt{x^2 + y^2}$.Тоді отримаємо $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ рівняння еліпсоїда обертання.

Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, утворена з еліпсоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному до площини початкового меридіана.

Рівняння еліпсоїда отримаємо шляхом подібного перетворення з коефіцієнтом k за формулами $X = x,\ Y = ky,\ Z = z$ підставивши в рівняння еліпсоїда обертання і поклавши $k^2a^2 = b^2$ $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$.

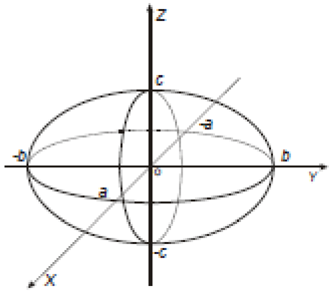


Рис. 20

Властивості

1. Еліпсоїд − поверхня другого порядку.

2. Еліпсоїд знаходиться в середині паралелепіпеда з розмірами $2a$, $2b$, $2c$ з центром в початку координат.

3. Точки $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$, які належать еліпсоїду, називаються його вершинами, або точками заокруглення.

3. Еліпсоїд має один центр симетрії, три осі симетрії і три площини симетрії.

4. Форма еліпсоїда встановлюється методом перерізів:

у площині yOz : $\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ − еліпс;

у площині xOy: $\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ − еліпс;

у площині xOz: $\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ − еліпс.

Еліпсоїд обертання зображається як і на рисунку 20, оскільки в горизонтальній площині коло зображається еліпсом.

4.8.2. Гіперболоїди

1. Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Однопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо її уявної осі

Якщо рівняння гіперболи в площині *xOz*: $\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$, то рівняння поверхні, утвореної обертанням цієї гіперболи навколо осі Oz : $\dfrac{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ або $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – рівняння ***однопорожнинного гіперболоїда обертання***.

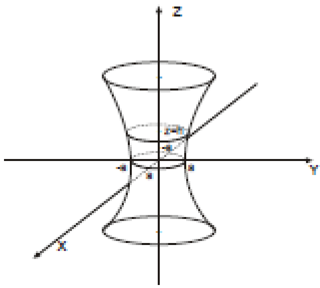


Рис.21

2. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, утворена з однопорожнинного гіперболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному до площини початкового меридіана.

Отримаємо рівняння ***однопорожнинного гіперболоїда*** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

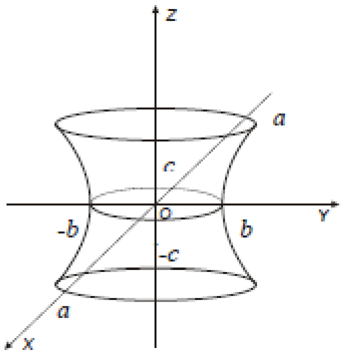


Рис. 22

Властивості

1. Гіперболоїд − поверхня другого порядку.

2. Однопорожнинний гіперболоїд має один центр симетрії, три осі і три площини симетрії.

3. Форму досліджують методом перерізів:

у площині $\gamma_1 : \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ − гіпербола,

у площині xOy $\gamma_2 : \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ − еліпс,

$\gamma_3 : \begin{cases} z = \pm h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$ − еліпс у будь-якій площині, паралельній xOy,

$\gamma_4 : \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ − гіпербола у площині xOz.

3. Двопорожнинний гіперболоїд обертання

Двопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо дійсної осі

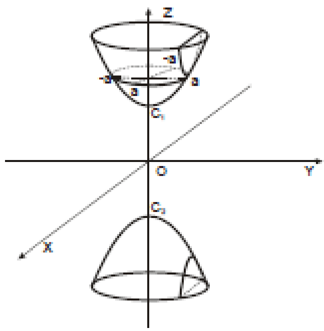


Рис. 23

Якщо початковий меридіан в площині xOz, то його рівняння $\gamma:\begin{cases} y=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1. \end{cases}$

При обертанні цього початкового меридіану навколо осі Oz утворюється поверхня обертання, рівняння якої має вигляд

$\dfrac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ або $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – ***рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання.***

4. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, утворена з двопорожнинного гіперболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному площині початкового меридіана.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

Властивості

1. Двопорожнинний гіперболоїд − поверхня другого порядку.

2. Двопорожнинний гіперболоїд має: один центр симетрії, три площини симетрії, три осі симетрії.

3. Точки $(0, 0, -c)$ та $(0, 0, c)$ − вершини поверхні.

4.8.3. Параболоїди

1. Параболоїд обертання

Параболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням параболи навколо її осі (рис.3.26).

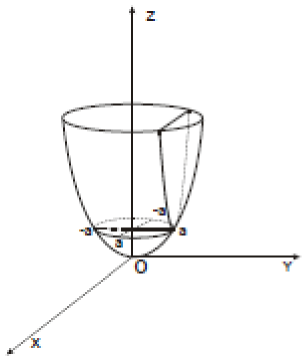


Рис. 24

Якщо початковий меридіан розміщений в площині xOz, то його рівняння можна записати у вигляді: $\gamma:\begin{cases} y=0, \\ x^2=2pz. \end{cases}$

Рівняння параболоїда обертання отримує вигляд $\dfrac{x^2+y^2}{p}=2z$.

Якщо початковий меридіан розміщений в площині xOz, і його рівняння має вигляд: $\gamma:\begin{cases} y=0, \\ x^2=2pz \end{cases}$, то параболоїд обертання розміститься в іншому півпросторі відносно площини xOy.

2. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, утворена з параболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу, або стиску в напрямку, перпендикулярному площині початкового меридіана. Отримаємо рівняння $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, причому p і q – однакового знаку .

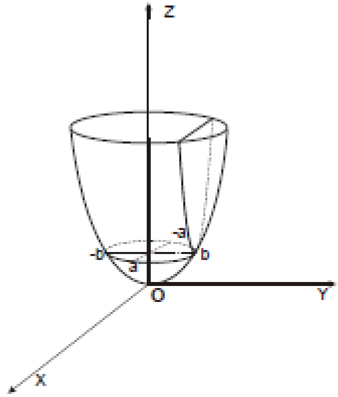


Рис. 25

Точка $(0, 0, 0)$ − вершина поверхні.

Форма поверхні досліджується методом перерізів. Еліптичний параболоїд має дві площини симетрії, вісь симетрії, і не має центра симетрії.

3. Гіперболічний параболоїд

Цю поверхню не можна отримати з поверхні обертання.

Гіперболічним параболоїдом (сідлом) називається поверхня, утворена рухом параболи в просторі, яка переміщається паралельно деякій площині, вершина якої, весь час ковзає по іншій нерухомій параболі, яка знаходиться в площині, перпендикулярній до площини рухомої параболи. Осі рухомої і нерухомої парабол взаємно протилежно напрямлені.

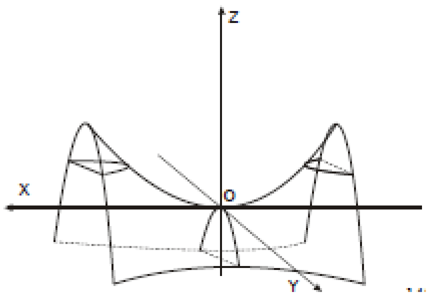


Рис. 26

Якщо нерухома парабола в площині xOz задана рівнянням:

$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 = 3pz, \\ x = 0, \end{cases}$ а рухома парабола в площині xOy –

$\gamma_2 : \begin{cases} x = d, \\ y^2 = 2q(h-7), \end{cases}$ де p і q обидва додатні, то рівняння

поверхні матиме вигляд $y^2 = 2q\left(\dfrac{d^2}{2p} - z\right)$ тобто

$$\frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p^2} = 2z$$ – ***рівняння гіперболічного параболоїда***.

Властивості

Як і у випадку еліптичного параболоїда, поверхня не має центру, має дві площини симетрії. (в даному випадку це yOz і xOz); одну вісь симетрії: (в даному випадку Oz), по якій перетинаються площини симетрії. Форма досліджується методом перерізів:

у площині xOy:

$\gamma_1 : \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \end{cases}$ – дві прямі $\dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q} = 0$ та $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 0$;

у площинах, паралельних координатній:

$$\gamma_2:\begin{cases} z=h>0, \\ \dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2h>0 \end{cases}$$ – гіпербола з дійсною віссю Ox;

$$\gamma_3:\begin{cases} z=-h, \\ -\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h \end{cases}$$ – гіпербола з дійсною віссю Oy.

4.8.4. *Лінійчасті поверхні*

Поверхня називається ***лінійчастою***, якщо через кожну її точку можна провести пряму, яка повністю лежить на поверхні. *Іншими словами*: лінійчасту поверхню можна отримати рухом прямої в просторі.

Лінійчастими серед розглянутих поверхонь другого порядку є циліндри, конуси, однопорожнинний гіперболоїд, гіперболічний параболоїд.

4.9. Приклади розв'язання задач

1. Записати рівняння сфери з центром в точці $A(1;-2;3)$, яка дотикається до площини $x+4y-5z-20=0$.

Розв'язання. Рівняння сфери з центром в точці A має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, де a, b, c – координати її центра A, r – радіус. Радіус r можна знайти як відстань від центра сфери до дотичної площини.

Отримуємо $r=\dfrac{|1+4\cdot(-2)-5\cdot 3-20|}{\sqrt{1^2+4^2+(-5)^2}}=\sqrt{42}.$

Отже, шукане рівняння має вигляд $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=42$

2. Довести, що сфери, які визначаються рівняннями $x^2+y^2+z^2=1$ та $x^2+y^2+z^2-8x+7=0$, дотикаються одна до одної зовнішнім способом.

Розв'язання. Центр першої сфери, радіус якої рівний 1, знаходиться в початку координат. У другій сфері $(x-4)^2+y^2+z^2=9$ центр C має координати $(4;\,0;\,0)$, а радіус рівний 3. Таким чином, відстань між центрами даних сфер $d=|OC|=4$. Оскільки сума радіусів також рівна 4, то сфери дотикаються одна до одної зовнішнім способом.

3. Написати рівняння еліпсоїда, який проходить через точку $N(1;\,\sqrt{3};\,\sqrt{3})$, осі якого співпадають з осями координат і перетинає площину yOz по еліпсу: $\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1.$

Розв'язання. Рівняння еліпсоїда, осі якого співпадають з осями координат має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Оскільки у площині yOz : $\begin{cases} x=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ або

$\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1, \end{cases}$ то $b^2=5,\ c^2=20.$

Оскільки еліпсоїд проходить через точку N, то: $\frac{1}{a^2}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{5}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{20}=1$. Звідси $a^2=4$.

Отже, рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1.$

ЗМІСТ

Навчальне видання

Коляда Р. В., Мельник О. М.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Ч. 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Методичні вказівки для студентів спеціальностей
”Комп’ютерні науки”, “Інформаційні системи і технології” ,

Видання виходить в авторській редакції