

## ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Другий семестр

#### **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. Інтегральне числення. Диференційне числення функцій багатьох змінних.**

**Тема Невизначений інтеграл.** Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.

**Тема Основні методи інтегрування.** Метод безпосереднього інтегрування, метод заміни змінної. Інтегрування частинами.

**Тема . Інтегрування функцій.** Інтегрування дробово-раціональних функцій. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції та деякі ірраціональні вирази. Інтеграл, що “не беруться”.

**Тема. Визначений інтеграл.** Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення та умови існування визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи інтегрування. Наближене обчислення визначених інтегралів. Застосування визначеного інтеграла в прикладних задачах. Невластиві інтегралі. Інтеграл Пуассона.

### **13. Методичне забезпечення**

1. Коляда Р.В., Мельник І.О., Мельник О.М. Вища математика . Навчальний посібник. Львів, Магнолія, 2014, 342 с.
2. Коляда Р.В., Мельник І.О., Мельник О.М. Вища математика в задачах і прикладах. Навчальний посібник. Львів:СПОЛОМ, 2014, 524 с.
3. Коляда Р.В., Пушак Я.С. Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Вища математика” студентами інженерно-економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. (Частина 1). Львів. УАД. 2008 – 87 с.
4. Коляда Р.В., Пушак Я.С. Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Вища математика” студентами інженерно-економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. (Частина 1). Львів. УАД. 2008 – 78 с.
5. Байдак Н.Г., Коляда Р.В., Лозовий Б.Л., Пирч Н.М., Пушак Я.С., Стасюк К.Г., Шабат О.Є. Вища математика. Індивідуальні домашні завдання. Ч.1. 85с., 2008.
6. Байдак Н.Г., Коляда Р.В., Лозовий Б.Л., Пирч Н.М., Пушак Я.С., Стасюк К.Г., Шабат О.Є. Вища математика. Індивідуальні домашні завдання. Ч.2. 83с., 2008.
7. Коляда Р.В. Індивідуальні домашні завдання з вищої математики для студентів денної форми навчання. Львів. УАД, 2009, ч.1 – 23 с.
8. Коляда Р.В. Індивідуальні домашні завдання з вищої математики для студентів денної форми навчання. Львів. УАД, 2009, ч.2 – 19 с.

9. Коляда Р.В., Пушак Я.С., Мельник І.О. Вища математика. Навчальний посібник. Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2010. – 332 с.

#### 14. Рекомендована література

##### Базова

10. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. Навч. посібник. – Київ, 1997- 397 с.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
12. Бугір М.К. Математика для економістів. Навч. посібник.-Тернопіль. Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
13. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі. Навч.посібник.- Київ, Либідь, 2007 –720 с.
14. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
15. Дубовик В.П., Юрик І.І. Збірник задач. Вища математика. – К.: Вища школа, 2001.
16. Дутка Г.Я. Практикум з математики для економістів. – Львів, 1998.- 362с.
17. Карасева А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 1982. Ч.1, 2.

##### Допоміжна

1. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1992. – 288 с.
2. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юреть І.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. Ч. 1, 2, 3.

#### 15. Інформаційні ресурси

Ресурсами для навчальної дисципліни виступають нормативні акти УАД, навчальна програма дисципліни, відкриті Інтернет-ресурси та віртуальне навчальне середовище УАД, де розміщено електронні навчально-методичні матеріали розроблені викладачами кафедри ПМіФ, Інтернет.

$$2 \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = -2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2 \int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2} =$$

#### НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

#### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти інтеграл  $\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$ .

$$\text{Розв'язання.} \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx = \left. \begin{array}{l} 2 \ln x + 3 = t \\ \frac{2 dx}{x} = dt \\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \int \frac{t^3}{2} dt = \frac{t^4}{8} + c = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^3 + c.$$

Задача 2. Знайти інтеграл  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

Розв'язання. Використаємо тригонометричну підстановку  $x = a \sin t$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + c = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + c =$$

$$\frac{a^2}{2} \left( t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + c = \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \sin \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) \right)$$

$$\frac{a^2}{2} \left( t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + c = \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \sin \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) \right) \sqrt{1 - \sin^2 \left( \arcsin \frac{x}{a} \right)} + c =$$

$$\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Задача 3. Знайти інтеграл  $\int x^2 \ln x dx$ .

Розв'язання. Інтегруємо частинами.

$$\int x^2 \ln x dx = \left. \begin{array}{l} \ln x = u; du = \frac{dx}{x} \\ x^2 dx = dv; v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Задача 4. Знайти інтеграл  $\int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}$ .

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 2)} = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + C}{x^2 + 2} dx.$$

Невідомі коефіцієнти А, В, С, знайдемо методом невизначених коефіцієнтів, який полягає у порівнянні коефіцієнтів при однакових степенях.

$$\frac{1}{x(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2},$$

$$1 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)x,$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + 2A.$$

Складемо систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A=1 \end{cases}, \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Тоді  $\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(x^2+2) + \ln c = \ln \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

Задача 5. Знайти інтеграл  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ .

*Розв'язання.*

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c.$$

Задача 6. Знайти інтеграл  $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ .

*Розв'язання.* Використаємо універсальну підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1} \right| + c.$$

## ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ І ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ .

*Розв'язання.*

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \\ e^x - 1 = t^2 \\ e^x dx = 2t dt \\ \alpha = \sqrt{e^0 - 1} = 0 \\ \beta = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{(t^2 + 1)t}{(t^2 + 4)(t^2 + 1)} \cdot 2t dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right) dt = 2 \left( t - \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 - \pi.$$

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл  $\int_1^e x \ln x dx$ .

Розв'язання.  $\int_1^e x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$

Приклад 3. Дослідити на збіжність невластивий інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

Розв'язання.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Знайти вказані інтеграли.

1.1 а)  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}} dx$ , б)  $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$ , в)  $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ .

1.2 а)  $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}} dx$ , б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$ , в)  $\int \ln(x-5) dx$ .

1.3 а)  $\int \frac{8-2x}{1+3x^2} dx$ , б)  $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4} dx$ , в)  $\int x^2 e^{-x} dx$ .

1.4 а)  $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx$ , б)  $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$ , в)  $\int x \cos 2x dx$ .

1.5 а)  $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}} dx$ , б)  $\int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$ , в)  $\int \arcsin 2x dx$ .

1.6 а)  $\int \frac{7x^3}{2x^4-5} dx$ , б)  $\int \frac{8x^3-1}{2x+1} dx$ , в)  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$ .

1.7 а)  $\int \frac{3x^2}{1-x^4} dx$ , б)  $\int \frac{x^5-2}{x^2-4} dx$ , в)  $\int (x+2) \ln x dx$ .

1.8 а)  $\int \frac{3-7x}{1+x^2} dx$ , б)  $\int \frac{2x^4-3}{x^2+1} dx$ , в)  $\int x \sin x dx$ .

1.9 а)  $\int \frac{e^x}{4-3e^x} dx$ , б)  $\int \frac{x^5}{1-x^3} dx$ , в)  $\int x \sin x \cos x dx$ .

1.10 а)  $\int \frac{x-5}{x^2+7} dx$ , б)  $\int \frac{x^2}{x^2-3} dx$ , в)  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

- 1.11 a)  $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ , б)  $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1} dx$ , в)  $\int \sin(\ln x) dx$ .
- 1.12 a)  $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}} dx$ , б)  $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$ , в)  $\int x \arctg x dx$ .
- 1.13 a)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}} dx$ , б)  $\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx$ , в)  $\int x^2 \arctg x dx$ .
- 1.14 a)  $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos x+3}} dx$ , б)  $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1} dx$ , в)  $\int x \arctg x^2 dx$ .
- 1.15 a)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5} dx$ , б)  $\int \frac{x^4+2}{x^2-4} dx$ , в)  $\int x^2 \cos 2x dx$ .
- 1.16 a)  $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$ , б)  $\int \frac{x^3+1}{x^2-1} dx$ , в)  $\int x^2 e^{3x} dx$ .
- 1.17 a)  $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}} dx$ , б)  $\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$ , в)  $\int \ln(2x-1) dx$ .
- 1.18 a)  $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x} dx$ , б)  $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2} dx$ , в) .
- 1.19 a)  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$  б)  $\int \frac{x^2+x}{2-x} dx$ , в)  $\int (x-7) \cos 2x dx$ .
- 1.20 a)  $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}} dx$ , б)  $\int \frac{1-x^4}{x^2+4} dx$ , в)  $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ .
- 1.21 a)  $\int \frac{3x+2}{2x^2+1} dx$ , б)  $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1} dx$ , в)  $\int \cos(\ln x) dx$ .
- 1.22 a)  $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ , б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$ , в)  $\int \cos(\ln 3x) dx$ .
- 1.23 a)  $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}} dx$ , б)  $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$ , в)  $\int \ln(x+4) dx$ .
- 1.24 a)  $\int \frac{6x+1}{2x^2-1} dx$ , б)  $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$ , в)  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$ .
- 1.25 a)  $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ , б)  $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$ , в)  $\int (x^2-4)e^x dx$ .
- 1.26 a)  $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , б)  $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx$ , в)  $\int \arctg 8x dx$ .
- 1.27 a)  $\int \frac{x^3}{3x^6-7} dx$ , б)  $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx$ , в)  $\int x \sin(x+3) dx$ .
- 1.28 a)  $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5} dx$ , б)  $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$ , в)  $\int \arccos \frac{x}{5} dx$ .
- 1.29 a)  $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-3} dx$ , б)  $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$ , в)  $\int \arcsin 5x dx$ .
- 1.30 a)  $\int \frac{2x^2}{3+3x^3} dx$ , б)  $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$ , в)  $\int x \ln(x+3) dx$ .

**Завдання 2.** Обчислити визначені інтеграли з точністю до двох знаків після коми

$$2.1 \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}. \quad 2.2 \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}. \quad 2.3 \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx. \quad 2.4 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}. \quad 2.5 \int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx.$$

$$\begin{aligned}
& 2.6 \int_1^e x \ln^2 x dx. \quad 2.7 \int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx. \quad 2.8 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}. \quad 2.9 \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}. \quad 2.10 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}. \\
& 2.11 \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx. \quad 2.12 \int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx. \quad 2.13 \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}. \quad 2.14 \int_1^2 \frac{x-5}{x^2 - 2x + 2} dx. \\
& 2.15 \int_{-1/2}^0 \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx. \quad 2.16 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}. \quad 2.17 \int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}. \quad 2.18 \int_0^{\frac{1}{2} \ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}. \quad 2.19 \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}. \\
& 2.20 \int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx. \quad 2.21 \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}. \quad 2.22 \int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx. \quad 2.23 \int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}. \quad 2.24 \int_{1/6}^2 \frac{dx}{3x^2 - x + 1}. \\
& 2.25 \int_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}. \quad 2.26 \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx. \quad 2.27 \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx. \quad 2.28 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1}. \quad 2.29 \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx. \\
& 2.30 \int_0^{\pi/4} 2 \cos x \sin 3x dx.
\end{aligned}$$

**Завдання 3.** Обчислити невластиві інтеграли або довести їх розбіжність

$$\begin{aligned}
& 3.1 \text{ а) } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}, \text{ б) } \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}. \\
& 3.2 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}, \text{ б) } \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}. \\
& 3.3 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}}, \text{ б) } \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}. \quad 3.4 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}, \text{ б) } \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}. \\
& 3.5 \text{ а) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}, \text{ б) } \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^2-1)}}. \quad 3.6 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{(x+2) dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}, \text{ б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-4}}. \\
& 3.7 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}, \text{ б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}. \quad 3.8 \text{ а) } \int_0^{\infty} x e^{-3x} dx, \text{ б) } \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt{9-x^2}}. \\
& 3.9 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2 + 4x + 5}, \text{ б) } \int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}. \quad 3.10 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx, \text{ б) } \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{3-4x}}. \\
& 3.11 \text{ а) } \int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4x + 5}, \text{ б) } \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 3.12 \text{ а) } \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}, \text{ б) } \int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}. \\
& 3.12 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}, \text{ б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}. \quad 3.14 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}, \text{ б) } \int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}. \\
& 3.15 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}, \text{ б) } \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx. \quad 3.16 \text{ а) } \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}, \text{ б) } \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx. \\
& 3.17 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}, \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}. \quad 3.18 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}, \text{ б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}. \\
& 3.19 \text{ а) } \int_0^{\infty} x \sin x dx, \text{ б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}. \quad 3.20 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx, \text{ б) } \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.21 \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}, \text{ б) } \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}. & \quad 3.22 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \text{ б) } \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+2)^2}. \\
3.23 \text{ а) } \int_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}} dx, \text{ б) } \int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}. & \quad 3.24 \text{ а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}, \text{ б) } \int_0^1 \ln x dx. \\
3.25 \text{ а) } \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx, \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}. & \quad 3.26 \text{ а) } \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx, \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}. \\
3.27 \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}, \text{ б) } \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx. & \quad 3.28 \text{ а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}, \text{ б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}. \\
3.29 \text{ а) } \int_{-\infty}^0 \left( \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx, \text{ б) } \int_0^1 \frac{3xdx}{\sqrt{1-x^2}}. & \quad 3.30 \text{ а) } \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)\pi} dx, \text{ б) } \int_{\frac{5}{7}}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-7x}}.
\end{aligned}$$

#### Завдання 4.

- 4.1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y^2 = 9x$ ,  $y = 3x$ .
- 4.2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = 3x$ .
- 4.3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ .
- 4.4. Обчислити площу фігури, обмеженої першою аркою циклоїди  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $x = a(t - \sin t)$  і віссю  $Ox$ .
- 4.5. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею лінії  $x = 3t^2$ ,  $y = 3t - t^3$ .
- 4.6. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою  $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ .
- 4.7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $y = x$ ,  $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ .
- 4.8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y^2 = x + 5$ ,  $y^2 = -x + 4$ .
- 4.9. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $\rho = a \cos 2\varphi$ .
- 4.10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = (x-4)^2$ ,  $y = 16 - x^2$ .
- 4.11. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $4y = 8x - x^2$ ,  $4y = x + 6$ .
- 4.12. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = 4t^2 - 6t$ ,  $x = 2t$  і віссю  $Ox$ .
- 4.13. Обчислити площу фігури, обмеженої між першим і другим завитками спіралі Архімеда  $\rho = a\varphi$  ( $a > 0$ ).
- 4.14. Обчислити довжину дуги параболи  $y = \sqrt{x}$  між точками з абсцисами



$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

4.15. Обчислити довжину астрои́ди  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \rho = a(1 - \cos \varphi)$

4.16. Обчислити довжину кардіоїди.  $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ .

4.17. Обчислити довжину дуги кривої лінії від точки  $O(0,0)$  до точки  $B(4,8)$ .

4.18. Обчислити довжину дуги кривої  $y = \frac{x^2}{2}$  від точки  $A(1,1)$  та  $B(2,4)$ .

4.19. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = 3x^2 + 1$  та  $y = 3x + 7$ .

4.20. Обчислити довжину дуги кривої  $y = 1 - \ln \cos x, (0 \leq x \leq \pi/6)$ .

4.21. Обчислити довжину дуги кривої  $\rho = 5 \sin \varphi$ .

4.22. Обчислити довжину дуги кривої  $\rho = 4 \cos \varphi$ .

4.23. Обчислити довжину дуги кривої  $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 \varphi$ .

4.24. Обчислити довжину дуги кривої  $y = \ln \sin x, (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$ .

4.25. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням фігури  $\Phi: y^2 = 4 - x, x = 0$  навколо осі координат  $Oy$ .

4.26. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням фігури  $\Phi: y = \sin x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi)$  навколо осі координат  $Ox$ .

4.27. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням фігури  $\Phi: y = \sin^2 x, (0 \leq x \leq \pi)$ , навколо осі абсцис.

4.28. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою  $y = \operatorname{tg} x$  та прямими  $y = 0$  і  $x = \frac{\pi}{3}$ .

4.29. Знайти площу фігури, обмеженої кривими  $y = \ln(x+2), y = 2 \ln x$  і віссю абсцис.

4.30. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою  $y = x^2 - 2x + 2$ , дотичною до неї в точці  $M(3,5)$  і координатними осями.