МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ **П, Б, МН, МК**

(перший курс, 2 семестр) частина 2

Контактні дані Коляда Р. В. моб. тел.. 067-670-36-25,
Email: rostyslavakolyada@gmail.com
Skype: Rostyslava Koiyada

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Другий семестр

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. Інтегральне числення. Диференційне числення функцій багатьох змінних.

Тема 21. Функції багатьох змінних. Відкриті та замкнені множини. Область. Границя та неперервність функції багатьох змінних. Частинні похідні та частинні диференціали функцій. Повний диференціал та його застосування до наближених обчислень. Диференціали вищих порядків. Похідна складної функції. Диференціали неявної функції дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних. Скалярне поле. Похідна за напрямком. Градієнт.

Тема 22. Екстремуми функції двох змінних. Необхідні і достатні умови екстремуму. Найбільше і найменше значення функції. Поняття про емпіричні формули. Метод найменших квадратів побудови емпіричних формул.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. Диференціальні рівняння. Ряди

Тема 23. Диференціальні рівняння першого порядку. Загальні поняття і означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

Тема 24. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння , що допускають зниження порядку. Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

Тема 25. Системи диференціальних рівнянь. Основні поняття і означення. Методи інтегрування.

Тема 26. Числові ряди. Основні поняття і означення. Необхідна умова збіжності числового ряду. Властивості числових рядів.

Тема 27. Знакододатні ряди. Достатні умови збіжності знакододатних рядів. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності.

Тема 28. Степеневі ряди. Поняття степеневого ряду. Теореми Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Властивості степеневих рядів.

13. Методичне забезпечення

1. Коляда Р.В., Мельник І.О., Мельник О.М. Вища математика . Навчальний посібник. Львів, Магнолія, 2014, 342 с.
2. Коляда Р.В., Мельник І.О., Мельник О.М. Вища математика в задачах і прикладах. Навчальний посібник. Львів:СПОЛОМ, 2014, 524 с.
3. Коляда Р.В., Пушак Я.С. Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Вища математика” студентами інженерно-економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. (Частина 1). Львів. УАД. 2008 – 87 с.
4. Коляда Р.В., Пушак Я.С. Методичні вказівки до вивчення дисципліни “Вища математика” студентами інженерно-економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. (Частина 1). Львів. УАД. 2008 – 78 с.
5. Байдак Н.Г., Коляда Р.В., Лозовий Б.Л., Пирч Н.М., Пушак Я.С.,Стасюк К.Г.,Шабат О.Є. Вища математика. Індивідуальні домашні завдання. Ч.1. 85с., 2008.

6. Байдак Н.Г., Коляда Р.В., Лозовий Б.Л., Пирч Н.М., Пушак Я.С.,Стасюк К.Г.,Шабат О.Є. Вища математика. Індивідуальні домашні завдання. Ч.2. 83с., 2008.
7. Коляда Р.В. Індивідуальні домашні завдання з вищої математики для студентів денної форми навчання. Львів. УАД, 2009, ч.1 – 23 с.
8. Коляда Р.В. Індивідуальні домашні завдання з вищої математики для студентів денної форми навчання. Львів. УАД, 2009, ч.2 – 19 с.
9. Коляда Р.В., Пушак Я.С., Мельник І.О. Вища математика. Навчальний посібник. Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2010. – 332 с.

14. Рекомендована література

Базова

10. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. Навч. посібник. – Київ, 1997- 397 с.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
12. Бугір М.К. Математика для економістів. Навч. посібник.-Тернопіль. Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
13. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі. Навч.посібник.- Київ, Либідь, 2007 –720 с.
14. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
15. Дубовик В.П., Юрик І.І. Збірник задач. Вища математика. – К.: Вища школа, 2001.
16. Дутка Г.Я. Практикум з математики для економістів. – Львів, 1998.- 362с.
17. Карасева А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 1982. Ч.1, 2.

Допоміжна

1. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1992. – 288 с.
2. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Вышейшая школа, 1990. Ч. 1, 2, 3.

15. Інформаційні ресурси

Ресурсами для навчальної дисципліни виступають нормативні акти УАД, навчальна програма дисципліни, відкриті Інтернет-ресурси та віртуальне навчальне середовище УАД, де розміщено електронні навчально-методичні матеріали розроблені викладачами кафедри ПМіФ, Інтернет.

ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x^3 + 2xy + 4xy^3$, а також градієнт функції в точці А(1; 1).

Розв'язування.

Знайдемо частинні похідні функції, вважаючи змінну y
у першому, а змінну x у другому випадках постійними величинами.

$z'_x = 9x^2 + 2y + 4y^3$,

$z'_y = 2x + 12xy^2$.

Знайдемо значення частинних похідних функції в точці A:

$z'(1,1)=15$, $z'_y(1,1)=14$.

Запишемо градієнт функції $gradz=15\vec{i}+14\vec{j}$.

Приклад 2. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2y^2-3x+6y+11=0$ в точці (1; –2).

Розв'язування.

Рівняння дотичної і нормалі мають вигляд:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0$$

$$F'_x(M_0)(x-x_0)-F'_y(M_0)(y-y_0)=0.$$

В нашому випадку $F(x,y)=x^2y^2-3x+6y+11=0$. Знайдемо частинні похідні:

$F'_x(x,y)=2xy^2-3$, $F'_y(x,y)=2x^2y+6$.

$F'_x(1,-2)=5$, $F'_y(1,-2)=2$.

Підставивши відповідні значення у рівняння дотичної і нормалі, одержимо:

$5x+2y-1=0$ – рівняння дотичної,

$2x-5y-12=0$ – рівняння нормалі.

Задача 3. Знайти екстремум функції

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Розв'язування.

Знайдемо частинні похідні функції

$z'_x = 4x^3 - 4x + 4y = 4(x^3 - x + y)$, $z'_y = 4(y^3 + x - y)$.

Для визначення стаціонарних точок складемо систему

$$\begin{cases} x^3-x+y=0 \\ y^3+x-y=0 \end{cases}.$$

Після додавання двох рівнянь одержимо рівняння

$x^3 + y^3 = 0$, звідки $y= -x$.

Тоді $x^3 - 2x = 0$, $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

Маємо три стаціонарні точки .

$$M_1(0,0),\ M_2(\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ M_3(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}).$$

Знайдемо $Z''_{xx}=12x^2-4$, $Z''_{xy}=4$, $Z''_{yy}=12y^2-4$. Визначимо $\Delta(x;\ y)=16(9x^2y^2-3x^2-3y^2)$.

Обчислимо величину $\Delta(x; y)$ в кожній стаціонарній точці

$$\Delta(M_1)=0,\ \Delta(M_2)=\Delta(M_3)=384>0,\ f''_{xx}(M_2)=f''_{xx}(M_3)=20>0.$$

Отже, точки M_2 і M_3 – точки мінімуму. $Z_{min}=-8$.

В точці M_1 маємо $\Delta(M_1) = 0$, тому в цій точці питання про екстремум залишається відкритим.

Переконаємося, що в точці M_1 екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є екстремальною. Відзначимо, що інших екстремумів задана функція не має, оскільки відсутні точки, в яких Z'_x і Z'_y не існують.

Задача 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $Z = x^2 y(4 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому лініями: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6$.

Розв'язування.

Спочатку знайдемо критичні точки всередині області. Для цього знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = xy(8 - 3x - 2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(4 - x - y) - x^2 y = x^2(4 - x - 2y).$$

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}.$$

Всередині області $x \neq 0$ та $y \neq 0$, тому

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}, \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

В критичній точці $M_1(2;1)$ маємо $Z(2;1) = 4$.

Проведемо дослідження функції на межі трикутника. На прямій $x + y = 6$ змінна $y = 6 - x$ і функція Z набуває вигляду

$$Z = x^2(6 - x) \cdot (4 - x + x - 6) = 2x^2(x - 6), \quad x \in [0;\ 6].$$

Знайдемо найбільше та найменше значення цієї функції однієї змінної x на замкненому відрізку $[0;\ 6]$. Знайдемо похідну

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 24$. Із рівності $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ знаходимо критичні точки:

$6x(x - 4) = 0$, звідки випливає, що $x_1 = 4$ та $x_2 = 0$. Отже. $Z(4) = -64$. При $x = 0$ та $x = 6$, $Z(0) = 0$, $Z(6) = 0$.

На прямій $y = 0$ маємо $Z = 0$.

Отже, задана функція Z має найбільше значення в точці $M_1(2;1)$ всередині області, найменше значення – в точці $M_2(4;2)$ на межі області.

Найбільше та найменше значення функції:

$$\max Z = Z(2;1) = 4;\ \min Z = Z(4;2) = -64.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається функцією від двох змінних?
2. Що називається областю визначення функції, лінією рівня?
3. Дати визначення границі функції від двох змінних.
4. Дати означення неперервної функції від двох змінних в точці і на множині точок.

Дати означення частинної похідної функції від двох змінних по одній з них. Який її геометричний зміст?

5. Як визначаються частинні похідні другого і третього порядків функції від двох змінних.
6. Дати означення повного диференціала і вказати формулу для його знаходження.
7. Як застосовується повний диференціал функції для наближеного обчислення її значення?
8. Вивести рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні , заданої рівнянням $z = f(x, y)$.
9. Що називається скалярним полем? Вивести формулу для похідної за напрямом $F(x, y, z)$.
10. Дати означення градієнта скалярного поля.
11. Написати формулу Тейлора для функції від двох змінних , користуючись диференціалами вищих порядків.
12. Сформулювати і довести теореми про необхідні і достатні умови локального екстремуму функції від двох змінних.
13. Дати означення і описати метод знаходження умовного екстремуму.

Завдання для практичних занять

Знайти область визначення вказаних функцій.

8.1. $z = \sqrt{y^2 - 6x + 9}$.   8.2. $z = \ln x + \ln \sin y$.

8.3. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$.   8.4. $z = \sqrt{x + y} + \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$.

8.5. $z = \ln(9 - x^2 + y^2)$.   8.6. $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{xy}$.

Знайти границі вказаних функцій.

8.7. $\lim\limits_{x \to 1, y \to 1} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y}$.   8.8. $\lim\limits_{x \to 0, y \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{x^2 + y^2}$.

8.9. $\lim\limits_{x \to 3, y \to 0} \dfrac{y}{\sin(xy)}$.   8.10. $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} \dfrac{\sqrt{xy + 1} - 1}{xy}$.

Знайти частинні похідні вказаних функцій.

8.11. $z = (x^2 + y^2 - xy^3)^4$.   8.12. $z = \arccos \dfrac{x}{y}$.

8.13. $z = arctg \dfrac{x - y}{x + y}$.   8.14. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

8.15. $z=\sqrt{x^3+y^3}$. 8.16. $z=\ln\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

Знайти частинні диференціали функцій.

8.17. $z=\sqrt{x^3-y^3}+\sqrt{xy}$. 8.18. $z=x^4+3x^2y^3-2y^4$.

8.19. $z=e^{-xy+y^2}$. 8.20. $z=tg^2(x^2+xy^2)$.

Знайти повний диференціал вказаних функцій.

8.21. $u=z\sqrt{x^2+y^2}$. 8.22. $z=\sin^3 xy$.

8.24. $z=e^{\sqrt{\cos xy}}$. 8.25. $u=ctgxy\cdot\sqrt{yz}$.

Знайти частинні похідні функцій.

8.26. $z=\sqrt{u^2+v^2}$, якщо $u=x\sin y,\ v=y\cos x$.

8.27. $z=tg^3(x^2-y^2)$, якщо $y=\sin x^2$.

Знайти похідні функції, заданих рівнянням.

8.29. $\sin^2 xy^2+\cos^2 x^2y=2$. 8.30. $xyz+x^2yz+xy^2z+xyz^2=1$.

Обчислити наближено вказані вирази, замінюючи приріст відповідних функцій їх повними диференціалами.

8.31. $(2{,}02)^2+(2{,}97)^2$. 8.32. $\sqrt{(5{,}98)^2+(8{,}03)^2}$.

Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні.

8.33. $x^2yz+2y^2+4yz-4=0$ в точці $M_0(0;1;-1)$.

8.34. $z=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}y^3$ в точці $M_0(1;0;1)$.

Дослідити вказані функції на екстремум.

8.35. $z=xy(x+y-2)$. 8.36. $z=x^2+xy+y^2+2x-2y+3$.

8.37. $z=\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}$. 8.38. $z=2x^3+2y^3-36xy$.

Знайти найбільше і найменше значення функції $Z = f(xy)$ в області D, обмеженій вказаними лініями.

8.39. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D: $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.

8.40. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, D: $x = -1,\ x = 1,\ y = -1,\ y = -1$.

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ І ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(xy^2 + y^2)\, dx + (x^2 - x^2y)\, dy = 0.$$

Розв'язування.

Виконаємо перетворення

$$y^2 (x + 1)\, dx + x^2 (1 - y)\, dy = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні, поділивши обидві частини цього рівняння на вираз

$x^2y^2 \neq 0$,

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = c, \text{ c =const.}$$

Звідки $\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|y| - \frac{1}{y} = c$.

або $\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = c$ – загальний інтеграл рівняння.

Перевіримо втрату коренів. Рівняння $x\,y = 0$ має розв'язки $x = 0$, $y = 0$, тому прямі $x = 0$ та $y = 0$ є інтегральними кривими даного рівняння. Вони не утворюються із загального інтеграла ні при жодному значенні c. Тому розв'язки $x = 0$ та $y = 0$ є особливими і їх слід дописувати додатково до загального інтеграла.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

Розв'язування.

Перевіримо чи права частина рівняння є однорідною функцією

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Тому задане диференціальне рівняння є однорідним. Використаємо підстановку $y = t\,x$, тоді $y' = t'x + t$. Одержимо $t'x + t = \frac{1+t^2}{2}$, $x\frac{dt}{dx} = \frac{(t-1)^2}{2}$.

Розділимо змінні і проінтегруємо обидві частини рівняння

$$2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{2}{t-1} = \ln|cx|,$$

$\frac{2x}{x-y} = \ln|cx|$, $cx = e^{\frac{2x}{x-y}}$ – загальний інтеграл.

Перевіримо чи розв'язки $x = 0$, $t = 1$, де $t = \frac{y}{x}$ є особливими. Дійсно, точки, в яких $x = 0$ не входять в область визначення правої частини цього рівняння, тому пряма $x = 0$ не може бути інтегральною кривою, а отже особливим розв'язком.

Нехай $t = 1$, $\frac{y}{x} = 1$, $y = x$. Функція $y = x$ перетворює дане рівняння у тотожність, тому є його розв'язком, причому особливим. Отже, остаточно $cx = e^{\frac{2x}{x-y}}, y = x -$ розв'язки диференціального рівняння.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}.$$

Розв'язування.

Це рівняння, що зводиться до однорідного. Знайдемо

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, тому зробимо заміну $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$

$dx = du$,

$dy = dv$, $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$.

Задане рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)},$$

причому α і β вибираємо так, щоб

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, одержимо α =1, $\beta = -1$.

Заміною

$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 1 \end{cases}$ задане рівняння зводиться до однорідного

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}.$$

Одержане однорідне рівняння розв'язуємо за допомогою заміни $v = uz$. Загальний інтеграл цього рівняння

$$(v - u)^3 = c(u + v).$$

Повертаючись до попередніх змінних x та y, одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$(y - x + 2)^3 = c(x + y).$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + 2yx = 2x$.

Розв'язування.

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний його розв'язок *y(x)=u(x)v(x),* де *u(x), v(x)* – часткові розв'язки, причому один з них довільний.

Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставимо у рівняння

$$u'v + uv' + 2uvx = 2x, \quad u'v + u(v' + 2vx) = 2x,$$

Знайдемо перший частковий розв’язок рівняння

$$v' + 2vx = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -2vx, \quad \int \frac{dv}{v} = -2\int xdx,$$

$v = e^{-x^2}$ – частковий розв’язок.

Знайдемо другий частковий розв’язок $v(x)$

$$u'e^{-x^2} = 2x, \; u = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + c.$$

Запишемо загальний розв’язок даного рівняння $y = uv = (e^{x^2} + c)e^{-x^2} = 1 + ce^{-x^2}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y''' = \cos 2x$.

Розв’язування.

Загальний розв’язок рівняння знайдемо трикратним послідовним інтегруванням:

$y'' = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x + c_1,$

$y' = \int (\frac{1}{2}\sin 2x + c_1)dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_1x + c_2,$

$y = \int (-\frac{1}{4}\cos 2x + c_1x + c_2)dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3.$

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + y' = 2x - 1.$$

Розв’язування.

Це рівняння, що допускає зниження порядку (не містить шуканої функції).

Зробимо заміну z = y', тоді z' = y'' і одержимо лінійне рівняння першого порядку: $z' + z = 2x - 1,$ для розв’язування якого покладемо $z = uv, z' = u'v + uv'$, тоді $u'v + u(v' + v) = 2x - 1,$

Знайдемо перший частковий розв’язок рівняння

$v' + v = 0, dv = -vdx,$

$\ln v = -x, v(x) = e^{-x}$ – частковий розв’язок.

Знайдемо другий частковий розв'язок *u(x)*

$$u'e^{-x} = 2x-1, \quad u = \int (2x-1)e^{x}dx.$$

Інтегруємо частинами:

$$u = \int (2x-1)e^{x}dx = \begin{vmatrix} 2x-1=u & du = 2dx \\ e^{x}dx = dv & v = e^{x} \end{vmatrix} =$$

$$= (2x=1)e^{x} - 2\int e^{x}dx = (2x-1)e^{x} - 2e^{x} + c_1.$$

Тоді $z = uv = ((2x-1)e^{x} - 2e^{x} + c_1)e^{-x} = 2x-3+c_1e^{-x}$, $y' = 2x-3+c_1e^{-x}$. Інтегруючи обидві частини рівняння , одержимо загальний розв'язок рівняння $y = x^2 - 3x - c_1e^{-x} + c_2$.

Приклад 7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}$$

Розв'язування.

Загальний розв'язок заданого рівняння $y(x) = \overline{y}(x) + y*(x)$, де $\overline{y}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y*(x)$ –деякий частковий розв'язок неоднорідного рівняння. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$. Розв'язавши його, одержуємо характеристичні корені: $k_1 = 3,\ k_2 = -1$.

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\overline{y}(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}.$$

Частковий розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y*(x) = x(Ax+B)e^{3x}$, оскільки один з характеристичних коренів співпадає з α = 3.

Знайшовши $y*'$ та $y*''$, підставивши їх у вихідне рівняння, після спрощення одержимо 8 $Ax + 2A + 4B = x + 2$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях $\begin{array}{c|l} x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 2 \end{cases}$} \\ x^0 & \end{array}$, $A = \dfrac{1}{8}, B = \dfrac{7}{16}$.

Тоді $y*(x) = x(\dfrac{1}{8}x + \dfrac{7}{16})e^{3x} = (\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{7}{16}x)e^{3x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + (\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x)e^{3x}$.

Приклад 8. Інвестиція величиною 10 тис. гривень зростає неперервно із швидкістю пропорційною 5%. Знайти:

1) значення інвестиції у довільний час t;
2) величину інвестованого капіталу через 8 років;
3) через скільки років інвестиція буде дорівнювати 20 тис. гривень?

Розв'язування.

Використаємо загальну задачу про зростання інвестицій. Відомо, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Ставиться задача про знаходження закону зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової ($t = 0$) інвестиції K_0.

Нехай $K(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент t (шукана функція);

Тоді $\frac{dK(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції, $r = \frac{R}{100}$.

За умовою задачі маємо: $\begin{cases} \frac{dK(t)}{dt} = \frac{R}{100}K(t) \\ K(t)\big|_{t=0} \end{cases}$.

Одержали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.

Загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$K(t) = e^{rt+c} = e^c e^{rt}.$$

За умовою $K_0 = K(t=0) = e^c$.

Отже, розв'язком задачі Коші буде функція $K(t) = K_0 e^{rt}$, яка показує, що інвестиції зростають за експоненціальним законом.

1) Враховуючи викладене, інвестиції в довільний час t дорівнюють $K(t) = 10000e^{0,05t}$;
2) Інвестований капітал через 8 років буде складати $K(8) = 10000e^{0,05\times 8} = 10000e^{0,4}$ грн.
3) Знайдемо через скільки років інвестиція буде 20 тис. гривень. Для цього потрібно розв'язати рівняння:

   $10000e^{0,05t} = 20000$ або $0,05t = \ln 2$, звідки $t = 20\ln 2$ років.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається диференціальним рівнянням n-го порядку ? Як визначити порядок диференціального рівняння ?
2. В чому полягає задача Коші для диференціального рівняння n – го порядку?
3. Що називається загальним розв’язком диференціального рівняння n – го порядку?
4. Які класи диференціальних рівнянь першого порядку вам відомі? Вказати методи інтегрування.
5. Вказати класи диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.
6. Дати означення лінійного диференціального рівняння n – го порядку?
7. Дати означення лінійного диференціального рівняння (однорідного, неоднорідного) другого порядку.
8. Яка структура загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку?
9. Яка структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?
10. В чому полягає метод варіації довільних постійних?
11. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
12. Який вигляд має загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
13. Як визначається частковий розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами із спеціальною правою частиною?

Завдання для практичних занять

Перевірити чи функція $y = y(x, c)$, де $c = const$. є розв’язком вказаного диференціального рівняння.

11.1. $y = x^2(1 + ce^{1/x})$, $\quad x^2y' + (1-2x)y = x^2$.

11.2. $y = \dfrac{2+cx}{1+2x}$, $\quad 2(1 + x^2y') = y - xy'$.

11.3. $x^2 + y^4 = cy^2$, $\quad xydx = (x^2 - y^4)dy$.

Знайти загальні інтеграли або загальні розв’язки вказаних диференціальних рівнянь.

11.4. $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$. 11.5. $(xy^2 + x)dx = (x^2y - y)dy$.

11.6. $xy' = y\ln y$. 11.7. $xyy' = 1 - x^2$.

11.8. $y' = (2y+1)tgx$. 11.9. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

11.10. $(1+e^x)y' = ye^x$.

11.11. $\dfrac{y}{y'} = \ln y$.

11.12. $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$.

11.13. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

11.14. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.

11.15. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

11.16. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

11.17. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$.

11.18. $y' + \dfrac{y}{x} = 1 + 2\ln x$.

11.19. $y' + 2y = 4x$.

11.20. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^3}$.

11.21. $y' + \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{arctgx}{1+x^2}$.

11.22. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

11.23. $xy' + y = x + 1$.

11.24. $y' = 2x(x^2 + y)$.

11.25. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$.

11.26. $y' + 3y = e^{2x}y^2$.

11.27. $y' - tgx \cdot y + y^2 \cos x = 0$.

11.28. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

11.29. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

11.30. $y''' = x^2 - \sin x$.

11.31. $y'' = \cos 2x + \dfrac{1}{x}$.

11.32. $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

11.33. $yy'' = (y')^2$.

11.34. $xy'' = y'\ln\dfrac{y}{x}$.

11.35. $x^2y'' + xy' = 1$.

11.36. $y'' + y'tgx = \sin 2x$.

11.37. $xy'' - y' = x^2e^x$.

11.38. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

11.39. $y'' - 8y' + 12y = 0$.

11.40. $y'' - 9y' = 0$.

11.41. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

11.42. $y'' + 4y = 0$.

11.43. $6y'' + y' - y = 0$.

11.44. $y'' + y' = 2x - 1$. 11.45. $y'' - 2y' = 2e^x$

11.46. $y'' + 3y' = 16 - 6x$. 11.47. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

11.48. $y'' - 3y' + 2y = x^3$. 11.49. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

11.50. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$.

11.51. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$. 11.52. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

Знайти частинні розв’язки вказаних диференціальних рівнянь, що задовольняють заданим початковим умовам.

11.53. $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0$, $y(1) = 1$.

11.54. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.

11.55. $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, $y(1) = 1$.

11.56. $y^2 dx = (x + ye^{-1/y})dy$, $y(0) = -3$.

11.57. $xdy = (e^{-x} - y)dx$, $y(1) = 1$.

11.58. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

11.59. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$.

11.60. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi},\ y'(\pi) = e^{\pi}$

Розділ XII. РЯДИ

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ І ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$.

Розв’язування.

Порівняємо заданий ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ (геометрична прогресія із знаменником $q = \dfrac{1}{2}$). Очевидно, що $\dfrac{1}{n\cdot 2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$, тому за ознакою порівняння збіжний заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$.

Розв'язування.

Використаємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)\cdot 2^n}{2\cdot 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty -$$ ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n}{n+1})^n$.

Розв'язування.

Знайдемо $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{n}}=3>1$,

тоді за ознакою Коші ряд розбіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язування.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$,.

а) нехай $\alpha>1$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Обчислимо невластивий інтеграл.

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{\lim}{n\to\infty}(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{\alpha-1})=\frac{1}{\alpha-1},$$

який є збіжним, тому збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

б) нехай $\alpha\le 1$. Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ і $\sum_{n=1}^{\infty\infty}\frac{1}{n}$. Останній ряд розбіжний (гармонічний ряд),

$\frac{1}{n^{\alpha}}\ge\frac{1}{n}$, тому за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha<1$ розбіжний.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ називається узагальненим гармонічним рядом.

Приклад 5. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3}=\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{12^3}-\frac{1}{16^3}+\cdots$$

збіжний і знайти його суму з точністю до 0,001.

Розв'язування.

Для доведення збіжності ряду використаємо ознаку Лейбніца. Очевидно, що виконуються всі умови ознаки 1) знаки членів строго чергуються, 2) модулі його членів монотонно спадають, 3) n-ий член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$ ($\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$)

Щоб обчислити суму ряду з точністю до 0,001, потрібно взяти стільки його членів, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від 0,001. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від 0,001.

Отже, $\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}>0{,}001$, $\frac{1}{8^3}=\frac{1}{512}>0{,}001$, $\frac{1}{12^3}=\frac{1}{1728}<0{,}001$.

Таким чином досить залишити перші два члени ряду, а решта відкинути.

$S\approx S_2\approx\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}=\frac{1}{64}-\frac{1}{512}\approx 0{,}015$.

Приклад 6. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3(n+1)}$.

Розв'язування.

Знайдемо радіус збіжності ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1}=1.$$

Отже, інтервал збіжності ряду (–1; 1).

Дослідимо на збіжність ряд на кінцях інтервалу:

а) нехай x = – 1, тоді отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$, який є знакопочерговим рядом (ряд, в якому знаки членів строго чергуються), збіжним за ознакою Лейбніца.

б) нехай x = 1. Отримаємо числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$, який є розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом. Отже, областю збіжності заданого степеневого ряду є проміжок

[–1; 1).

Приклад 7. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл Пуассона $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$.

Розв'язування.

Заданий інтеграл " не береться", тому його обчислюють наближено, попередньо розклавши підінтегральну функцію в ряд Маклорена.

Розкладемо в ряд Маклорена функцію e^{-x^2}.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots.$$

Ряд рівномірно збіжний на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати на скінченному відрізку, зокрема [0,1; 3]:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \cdots.$$

Зробимо оцінку кожного члена ряду

$$\frac{1}{3} > 0,001, \frac{1}{1!33^3} = \frac{1}{81} > 0,001, \ \frac{1}{2!53^5} = \frac{1}{2430} < 0,001,$$

тоді з точністю до 0,001 маємо

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0,321.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Ввести поняття числового ряду, частинної суми ряду, суми ряду. Навести приклади.
2. Які основні властивості числових рядів?
3. Яка необхідна умова збіжності ряду?
4. Яка достатня умова розбіжності числового ряду?
5. Сформулювати достатні умови збіжності знакододатних рядів.
6. Сформулювати умови збіжності рядів, в яких знаки членів строго чергуються , знакозмінних рядів.
7. Які ряди називаються умовно збіжними, абсолютно збіжними?
8. Який ряд називається функціональним? Що є областю його збіжності?
9. Який ряд називається степеневим? Сформулювати теорему Абеля.
10. Як визначається радіус збіжності, область збіжності степеневого ряду?

11. Записати ряди Тейлора і Маклорена. Як вони використовуються для наближених обчислень?

Завдання для практичних занять

Записати кілька перших членів ряду.

12.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

12.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

12.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

12.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n+1)!}$.

Перевірити чи виконується необхідна умова збіжності.

12.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

12.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5n+2}$.

12.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$.

12.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Використовуючи достатні умови збіжності знакододатних

рядів, дослідити на збіжність ряди.

12.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

12.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$.

12.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+1}$.

12.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n+1}$.

12.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$.

12.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n+2}$.

12.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$.

12.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5^n}$.

12.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

12.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

12.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{(n+1)!}$.

12.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot\dots\cdot(3n-2)}$.

12.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

12.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

12.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n}\right)^{n}$.

12.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

12.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$.

12.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{2}+2}}$.

12.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

12.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

12.29. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}n}$.

12.30. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^{3}n}}$.

12.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^{3}(n+1)}$.

12.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

Дослідити на умовну і абсолютну збіжність вказані знакозмінні ряди.

12.33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{2n+1}$.

12.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n}n}{(2n+1)^{n}}$.

12.35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$.

12.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)}{3^{n}+1}$.

12.37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^{2}}$.

12.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^{n}}$.

Знайти область збіжності вказаних степеневих рядів.

12.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n+1)2^{n}}$.

12.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}x^{n}}{n^{2}+3}$.

12.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n}n}{(2n-1)\cdot 4^{n}}$.

12.42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{\sqrt{4n^{2}+1}}$.

12.43. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n}$.

12.44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{2n+1}$.

12.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n+1}}{(2n+1)\cdot 5^{n}}$.

Довести збіжність ряду і знайти його суму.

12.46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n-2^n}{18^n}$.

12.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{24^n}$.

12.48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$.

12.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

12.50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Розвинути в ряд Тейлора функції.

12.51. $f(x)=e^x$ за степенями $(x-1)$.

12.52. $f(x)=\ln x$ за степенями $(x-1)$.

12.53. $f(x)=\sqrt{x^3}$ за степенями $(x-1)$.

12.54. $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $(x+2)$.

Розвинути в ряд Маклорена функції

12.55. $f(x)=\sin^2 x$.

12.56. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$.

12.57. $f(x)=x\cos x$.

12.58. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Обчислити вказані інтеграли з точністю до 0,001.

12.59. $\int_0^{\pi/4} e^{-x^2}dx$.

12.60. $\int_0^{1/2}\frac{arctgx}{x}dx$.

12.61. $\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx$.

12.62. $\int_0^{1}\sqrt[3]{x}\sin x dx$.

Знайти три перших члени розвинення в ряд розв’язку рівняння , які задовольняють початкові умови.

12.63. $y'=x^2+y^2$, $y(1)=1$.

12.64. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$.

Індивідуальні домашні завдання №1 і № 2 видані студентам 9 березня на занятті. Хто був відсутній на занятті, прошу взяти завдання у старост груп.