МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ **П, Б, МН, МК**

(перший курс, 2 семестр) частина 2.

Контактні дані Коляда Р. В. моб. тел.. 067-670-36-25,
Email: rostyslavakolyada@gmail.com
Skype: Rostyslava Kolyada

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Другий семестр

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 Елементи математичної статистики

Тема 11 . Основні поняття математичної статистики. .Поняття про генеральну сукупність та вибірку. Полігон, гістограма.

Тема 12. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності. Оцінка параметрів генеральної сукупності за вибіркою. Поняття про незміщену, спроможну й ефективну оцінки параметрів розподілу. Оцінки математичного сподівання та дисперсії.

Тема 13 Довірчі інтервали. Надійність статистичних оцінок. Довірчі інтервали. Надійність. Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.

Тема 14. Статистичні гіпотези. Перевірка статистичних гіпотез. Критерії узгодження "хі–квадрат" Пірсона, Колмогорова.

Тема 15. Елементи дисперсійного аналізу. Однофакторний аналіз. Загальна, міжгрупова та внутрішньо групова дисперсії. Незміщені оцінки дисперсії, загальний метод перевірки впливу фактора на ознаку способом порівняння дисперсій. Поняття про двофакторний дисперсійний аналіз**.**

Тема 16. Елементи теорії регресії і кореляції. Статистична і кореляційна залежність. Поняття про лінійну кореляцію. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості. Поняття про функцію регресії. Розрахунок прямих регресії. Довірчий інтервал для лінії регресії. Коефіцієнт детермінації. Множинна регресія, визначення статистичних оцінок для параметрів функції лінійної множинної регресії. Множинний коефіцієнт кореляції та його властивості . Поняття про нелінійну регресію.

10. Методичне забезпечення

1. Матеріали до лекційних занять.
2. Методичні вказівки до практичних занять, завдання для індивідуальної роботи**.**

1. Р. Коляда, І. Мельник, О. Мельник, Н. Пирч .Теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник. Львів, 2017, 250 с.
2. Коляда Р.В., Пушак Я.С., Мельник І.О. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник. Львів, 2010, 161с.

Базова

1. Гмурман В.Е.. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: В.школа, 1977
2. Боровков А. А.. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.
4. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика.- Киев: Вища школа, 1988. – 438с.
5. Феллер В.. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967., т.1.
6. Ширяев А. Н.. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574.
7. Коляда Р.В., Мельник І.О., Мельник О.М. Вища математика математика в задачах і прикладах. Навчальний посібник. Львів: СПОЛОМ, 2014, 528 с.
8. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика.- К: Національна академія управління, 1997.- 255 с.
9. Емельянов Г.В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. – Издательство Ленинградского университета, 1967. – 329 с.

10. Теорія ймовірностей. Збірник задач. За редакцією А. В. Скорохода. – Київ: Вища школа, 1976. – 383 с.
11. Черняк О.І., Обушна О. М., Ставицький А. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач. – Київ: Знання, 2001. – 199 с.

Допоміжна

1. Малыхин В.И. Математика а экономике.– Москва. ИНФРА–М, 2002. 355с.
2. Турчин В.М. Математична статистика. – Київ. Академія, 1999, 238с.
3. Турчин В.М. Математична статистика в прикладах і задачах: Навч. посіб. У 2 ч. –Д.: Ред-вид. від Дніпропетр. ун-ту, 1998. – Ч.1. – 88 с., ч.2. – 224 с.

12. Інформаційні ресурси

Ресурсами для навчальної дисципліни виступають нормативні акти УАД, навчальна програма дисципліни, відкриті Інтернет-ресурси та віртуальне навчальне середовище УАД, де розміщено електронні навчально-методичні матеріали розроблені викладачами кафедри ПМіФ, Інтернет.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. У цеху друкарні встановлено 5 друкарських машин. Протягом 25 днів реєструвалась кількість друкарських машин, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Побудувати статистичну функцію розподілу. Обчислити $\bar{x}$ і s^2.

Розв'язування

На підставі вибіркових даних складемо статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою $F_n^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n}$.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3 < x \le 4; \\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{25}(7 + 14 + 12 + 4 + 5) = 1{,}68.$$

Дисперсію визначимо за формулою $s^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$. Знайдемо середнє значення квадрата ***x:***

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{25}(7 + 28 + 36 + 16 + 25) = 4{,}48. \qquad \text{Отже, } s^2 = 4{,}48 - (1{,}68)^2 = 1{,}6576.$$

Задача 2. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом n = 32. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9;

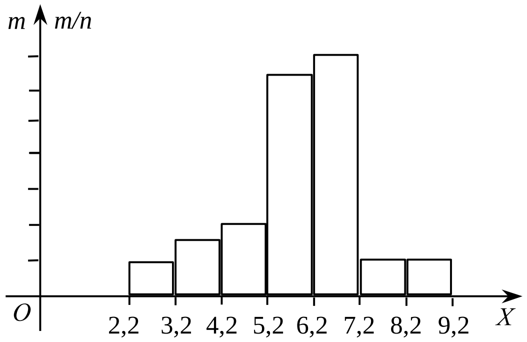
6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Запропонувати гіпотезу про вигляд $F(x)$ у сукупності. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\bar{x}$, s^2, As^*, Ek^*.

Розв'язування. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з рівними довжинами інтервалів: $\Delta x = \dfrac{\max\limits_i (x_i) - \min\limits_i (x_i)}{7}$; $\Delta x = \dfrac{9{,}2 - 2{,}2}{7} = 1$. Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2-3,2	3,2-4,2	4,2-5,2	5,2-6,2	6,2-7,2	7,2-8,2	8,2-9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо наступну гістограму.

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності.



Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, в якій запишемо середини інтервалів $u_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, їхні частоти n_i і нові змінні $v_i = \dfrac{u_i - C}{\Delta x}$. Візьмемо C, що дорівнює $u_4 = 5{,}7$. У наступних стовпцях обчислено значення $v_i n_i$, $v_i^2 n_i$, $v_i^3 n_i$, $v_i^4 n_i$, а в останньому рядку таблиці – їхні суми.

u_i	n_i	v_i	$v_i n_i$	$v_i^2 n_i$	$v_i^3 n_i$	$v_i^4 n_i$
2,7	2	–3	–6	18	–54	162
3,7	3	–2	–6	12	–24	48
4,7	4	–1	–4	4	–4	4
5,7	9	0	0	0	0	0
6,7	10	1	10	10	10	10
7,7	2	2	4	8	16	32
8,7	2	3	6	18	54	162
Сума	32	—	4	70	–2	418

Знайдемо умовні моменти розподілу від першого до четвертого порядків включно:

$$h_1^* = \frac{\sum v_i n_i}{n} = \frac{4}{32} = 0{,}125; \qquad h_2^* = \frac{\sum v_i^2 n_i}{n} = \frac{70}{32} = 2{,}1875;$$

$$h_3^* = \frac{\sum v_i^3 n_i}{n} = \frac{-2}{32} = -0,0625; \quad h_4^* = \frac{\sum v_i^4 n_i}{n} = \frac{418}{32} = 13,0525.$$

Визначимо числові характеристики за допомогою умовних моментів розподілу:

$$\overline{x} = C + h_1^* \Delta x = 5,7 + 0,125 \cdot 1 = 5,825;$$

$$s^2 = (\Delta x)^2 (h_2^* - (h_1^*)^2) = 2,1875 - (0,125)^2 \approx 2,172;$$

$$\mu_3^* = (\Delta x)^3 \left(h_3^* - 3h_2^* h_1^* + 2\left(h_1^*\right)^3\right) = -0,0625 -$$

$$-2,1875 \cdot 0,125 + 2(0,125)^3 \approx -0,332031;$$

$$\mu_4^* = (\Delta x)^4 (h_4^* - 4h_3^* h_1^* + 6h_2^* (h_1^*)^2 - 3(h_1^*)^4) = 13,0625 +$$

$$+4 \cdot 0,0625 \cdot 0,125 + +6 \cdot 2,1875(0,125)^2 - 3(0,125)^4 \approx 13,29809;$$

$$A_S^* = \frac{\mu_3^*}{s^3} = -\frac{0,332031}{\sqrt{(2,172)^3}} \approx -0,1037; \; E_k^* = \frac{\mu_4^*}{s^4} - 3 = \frac{13,29809}{(2,172)^2} - 3 \approx -0,1812.$$

Отже, асиметрія та ексцес близькі до нуля, чим підтверджується припущення про нормальний закон розподілу в сукупності.

Задача 3. Дані вимірювань величин X та Y наведені в таблиці.

X X	5 5 , 8	1 1 , 2	4 4 , 8	1 , 1 8	0 0 , 9	2 2 , 2	5 5 , 3	3 3 , 6	4 4 , 4	3 3 , 0
Y Y	1 1 , 2	1 1 , 7	0 0 , 7	4 4 , 9	4 4 , 2	1 1 , 2	1 1 , 6	1 1 , 5	1 1 , 5	2 2 , 0
X X	3 3 , 6	5 5 , 7	4 4 , 2	4 4 , 0	4 4 , 1	5 5 , 8	5 5 , 5	4 4 , 2	3 3 , 2	3 3 , 3
Y Y	1 1 , 5	1 1 , 8	1 1 , 7	1 1 , 5	1 1 , 5	1 1 , 3	1 1 , 7	! 1 , 0	0 0 , 7	2 2 , 3
X X	1 1 , 7	3 3 , 0	4 4 , 5	4 3 , 8	3 , 8	4 4 , 2	4 4 , 5	3 3 , 7	3 3 , 6	5 5 , 0
Y Y	3 3 , 5	1 1 , 4	0 0 , 9	0 0 , 8	1 1 , 8	1 1 , 8	1 1 , 4	1 1 , 5	2 2 , 7	1 1 , 2

Визначити числові характеристики вибіркової сукупності.

Розв'язування

Складемо на основі наведених даних кореляційну таблицю. За кожною змінною область реалізацій розбивається на 7 інтервалів:

$\min\{x_i\} = 0,9; \; \max\{x_i\} = 5,8; \; \Delta x = 0,7; \; \min\{y_i\} = 0,7; \; \max\{y_i\} = 4,9; \; \Delta y = 0,6.$

Y \ X	0,7–1,3	1,3–1,9	1,9–2,5	2,5–3,1	3,1–3,7	3,7–4,3	4,3–4,9	n_{x_i}
0,9–1,6		1				1		2
1,6–2,3	1				1		1	3
2,3–3,0	1	1	1					2

Y \ X	0,7–1,3	1,3–1,9	1,9–2,5	2,5–3,1	3,1–3,7	3,7–4,3	4,3–4,9	n_{x_i}
3,0–3,7	1	3	1	1				6
3,7–4,4		6						7
4,4–5,1	4	1						5
5,1–6,1	2	3						5
n_{y_j}	9	1 5	2	1	1	1	1	

Обчислюючи частоти n_{ij}, розглядають пари значень (x_i, y_i) і за кожною змінною визначають інтервал, в який вони потрапляють, та збільшують на 1 частоту n_{ij}. Якщо значення змінної потрапляє на межу інтервалу, то збільшують частоту нижнього інтервалу.

Додаючи частоти n_{ij} за рядками і стовпцями, дістанемо відповідно n_{x_i} і n_{y_j}. Щоб знайти числові характеристики, перейдемо до середин інтервалів за обома змінними і обчислимо змінні u та v за формулами $u_i = \dfrac{x_i - C_1}{\Delta x}$; $v_j = \dfrac{y_j - C_2}{\Delta y}$. При цьому $C_1 = 14{,}05$; $C_2 = 1{,}6$. Перейдемо до нової таблиці.

u \ v	–1	0	1	2	3	4	5	n_{x_i}
– 4		1				1		2
–3	1				1		1	3
–2		1	1					2

–1	1	3	1	1				6
0	1	6						7
1	4	1						5
2	2	3						5
n_{y_j}	9	15	2	1	1	1	1	

Знайдемо середні значення величин $u,\ v$, їхніх квадратів і добутку:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum u_i n_{x_i} = \frac{-8-9-4-6+5+10}{30} = -0{,}4;\quad \bar{v} = \frac{1}{n}\sum v_j n_{y_j} =$$

$$= \frac{-9+2+2+3+4+5}{30} \approx 0{,}2333;$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum v_j^2 n_{y_j} = \frac{9+2+4+9+16+25}{30} \approx 2{,}167;$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum u_i^2 n_{x_i} = \frac{32+27+8+6+5+20}{30} \approx 3{,}267;$$

$$\overline{uv} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j u_i v_j n_{ij} = \frac{-16+3-9-15-2+1-1-2-4-4}{30} \approx -1{,}633.$$

Знаходимо числові характеристики сукупності:

$$\bar{x} = C_1 + \Delta x\bar{u} = 4{,}05 - 0{,}7\cdot 0{,}4 = 3{,}77;$$

$$s_x^2 = (\Delta x)^2\left(\overline{u^2} - (\bar{u})^2\right) = (0{,}7)^2\left(3{,}267 - (-0{,}4)^2\right) \approx 1{,}522;$$

$$\bar{y} = C_2 + \Delta y\bar{v} = 1{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}2333 = 1{,}74;$$

$$s_y^2 = (\Delta y)^2(\overline{v^2} - (\bar{v})^2) = (0{,}6)^2(2{,}167 - (0{,}2333)^2) \approx 0{,}7604;$$

$$K_{xy}^* = \Delta x\ \Delta y\ (\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}) = 0{,}7\cdot 0{,}6\ (-1{,}633 + 0{,}4\cdot 0{,}2333) \approx$$

$$\approx -0{,}6468;\ r_{xy} = \frac{K_{xy}^*}{s_x s_y} = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}}{s_u s_v} = \frac{-1{,}633 + 0{,}4\cdot 0{,}2333}{\sqrt{3{,}107\cdot 2{,}112}} \approx -0{,}6012$$

Задача 4. Виконати вирівнювання статистичного ряду, заданого таблицею

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	13	28	27	19	7	4	1	1

Розв'язування

Оскільки $x_{\hat{a}} = 2,\ D_{\hat{a}} = 2{,}04,\ x_{\hat{a}} \approx D_{\hat{a}}$, то доцільно взяти за теоретичний розподіл – розподіл Пуассона з λ =2. З формули $p(k) \simeq \dfrac{2^k e^{-2}}{k!}$ отримуємо:

$$p(0) = 0{,}1353,\ p(1) = 0{,}2707,\ p(2) = 0{,}2707,\ p(3) = 0{,}1804,$$

$$p(4) = 0{,}0902,\ p(5) = 0{,}0341,\ p(6) = 0{,}0180,\ p(7) = 0{,}0034.$$

З формули $n_i^* = np_i$ маємо $n_0^* = 14,\ n_1^* = 27,\ n_2^* = 27,$

$$n_3^* = 18,\ n_4^* = 9,\ n_5^* = 3,\ n_6^* = 2,\ n_7^* = 0;\quad \sum n_i^* = 100.$$

Задача 5. Випадкова величина X розподілена нормально, $\sigma(X) =$ 1. Знайти гарантійний інтервал для a, якщо x = *2*, n = *16*, γ *= 0,99.*

Розв'язування

За таблицею значень функції Лапласа маємо $\Phi(t)$ =0,495, тому t =2,58 і знаходимо δ=0,65. Остаточно 1,35 < a < 2,65.

Задача 6. Випадкова величина X розподілена нормально, $n=36,\ s=1,\ \bar{x}=10,\ \gamma=0,95$. Оцінити величину a.

Розв'язування

З таблиці розподілу Стьюдента для величин γ і n знаходимо t_γ= 2,03 і визначаємо δ= 0,34. Остаточно 9,66< a <10,34.

Задача 7. Для нормально розподіленої величини X маємо n = 25, s=1, γ =0,99. Знайти гарантійний інтервал для σ.

Розв'язування

З таблиці q (γ, n) знаходимо q = 0,49. Будуємо гарантійний інтервал (s = 1) 1 – 0,49 < σ<1 + 0,49 ⇒ 0,51 < σ< 1,49.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти групові середні сукупності, яка складається з двох груп:

Перша група

x_i	0,1	0,4	0,6
n_i	3	2	5

Друга група

x_i	0,1	0,3	0,4
n_i	10	4	6

2. Задано розподіл статистичної сукупності

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

Знайти дисперсію сукупності:
а) виходячи з означення дисперсії;
б) застосовуючи формулу $D=\overline{x^2}-\left[\bar{x}\right]^2$,
в) медіану, моду варіаційного ряду.

3. Знайти вибіркову і виправлену дисперсії варіаційного ряду, утвореного за заданою вибіркою:

варіанта	1	2	5	8	9
частота	3	4	6	4	3

4. Знайти надійний інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання з заданою надійністю $\gamma=0,95$, якщо відомі середнє квадратичне відхилення $\sigma=2$, вибіркова середня $\overline{x_b}=5,4$, об'єм вибірки $n=10$ нормально розподіленої ознаки.

5. За даними 16 незалежних рівноточкових вимірювань фізичної величини знайдено $\overrightarrow{x_b}=23{,}161$ і $s=0,4$. Оцінити істинне значення a вимірюваної величини і точність вимірювання σ.

6. Задано вибіркові варіанти і їх частоти. Знайти методом добутку вибіркову середню і дисперсію

x_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5

7. Знайти асиметрію і ексцес емпіричного розподілу

x_i	10,6	10,8	11	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Зв'язок між ознаками X і Y генеральної сукупності задається таблицею

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
У	39	42	43	46	47	50	51	54	56	57

Записати вибіркове рівняння прямої регресії Y на X.

Розв'язування.

Рівняння прямої регресії Y на X має вигляд $Y = \rho_{xy} X + b$,

де $\rho_{xy} = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$, $b = \dfrac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$.

Для зручності обчислення використовують таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
20	39	400	780
21	42	441	882
22	43	484	946
23	46	529	1058
24	47	576	1128
25	50	625	1250
26	51	676	1326
27	54	729	1458
28	56	784	1568
29	57	841	1653
$\sum x = 209$	$\sum y = 485$	$\sum x^2 = 6085$	$\sum xy = 12049$

Підставивши одержані значення у формули, одержимо:

$$\rho_{xy} = \frac{10 \cdot 12049 - 209 \cdot 485}{10 \cdot 6085 - (209)^2} = 1{,}114,$$

$$b = \frac{6085 \cdot 485 - 209 \cdot 12049}{10 \cdot 6085 - (209)^2} = 25{,}219.$$

Шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд

$$Y = 1{,}114 X + 25{,}219.$$

Задача 2. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X заданими наведеними в кореляційній таблиці

Y \ X	6	16	26	36	46	n_x
5	1	5	3	–	–	9
9	–	2	14	2	–	18
13	–	3	20	6	–	29
17	–	–	16	14	2	32
21	–	–	–	8	4	12
n_y	1	10	53	30	6	100

Розв'язування.

Рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд

$$y-\overline{y}=r_b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x-\overline{x}).$$

Для зручності складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах u_i та v_j, які знайдемо за формулами

$$u_i=\frac{x_i-c_1}{h_1};\quad v_j=\frac{y_j-c_2}{h_2}.$$

Тут $c_1=13,\ \tilde{n}_2=26$ – умовні нулі, які визначаються варіантами, які мають найбільшу спільну частоту $n_{xy}=20$, а $h_1=10$, $h_2=4$ – різниця між сусідніми варіантами.

$V \backslash U$	–2	–1	0	1	2	n_v
–2	1	5	3	–	–	9
–1	–	2	14	2	–	18
0	–	3	20	6	–	29
1	–	–	16	14	2	32
2	–	–	–	8	4	12
n_u	1	10	53	30	6	100

Знайдемо $\overline{u}$ та $\overline{v}$:

$$\overline{u}=\frac{\sum n_u u}{n}=\frac{1\cdot(-2)+10\cdot(-1)+53\cdot 0+30\cdot 1+6\cdot 2}{100}=0,3,$$

$$\overline{v}=\frac{\sum n_v v}{n}=\frac{9\cdot(-2)+18\cdot(-1)+29\cdot 0+32\cdot 1+12\cdot 2}{100}=0,2.$$

Знайдемо допоміжні величини $\overline{u}^2$ та $\overline{v}^2$

$$\overline{u}^2=\frac{\sum n_u u^2}{n}=\frac{1\cdot 4+10\cdot 1+53\cdot 0+30\cdot 1+6\cdot 4}{100}=0,68,$$

$$\overline{v}^2=\frac{\sum n_v v^2}{n}=\frac{9\cdot 4+18\cdot 1+29\cdot 0+32\cdot 1+12\cdot 4}{100}=1,34.$$

Знайдемо σ_u і σ_v за формулами:

$$\sigma_u=\sqrt{\overline{u}^2-(\overline{u})^2}=\sqrt{0,68-(0,3)^2}=0,768;$$

$$\sigma_v=\sqrt{\overline{v}^2-(\overline{v})^2}=\sqrt{1,34-(0,2)^2}=1,14.$$

Знайдемо $\sum_v v\cdot U=\sum n_{uv}uv$. Для цього складемо розрахункову таблицю

<table>
<tr><td>U / V</td><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>U</td><td>$v\cdot U$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">–2</td><td>|-2</td><td>|-5</td><td>|0</td><td></td><td></td><td rowspan="3">–7</td><td rowspan="3">14</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-2|</td><td>-10|</td><td>-6|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">–1</td><td></td><td>|-2</td><td>|0</td><td></td><td></td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>14</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>-2|</td><td>-</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td></td><td>|-3</td><td>|0</td><td>|6</td><td></td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>20</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>0|</td><td>0|</td><td>0|</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td></td><td></td><td>|0</td><td>|1</td><td>|4</td><td rowspan="3">18</td><td rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>16</td><td>14</td><td>2|</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td></td><td></td><td></td><td>|8</td><td>|8</td><td rowspan="3">16</td><td rowspan="3">32</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>16</td><td>8|</td></tr>
<tr><td>V</td><td>–2</td><td>–12</td><td>–4</td><td>28</td><td>10</td><td></td><td>$\sum_v v\cdot U$ =6</td></tr>
<tr><td>$u\cdot V$</td><td>4</td><td>12</td><td>0</td><td>28</td><td>20</td><td>$\sum_u u\cdot V = 64$</td><td></td></tr>
</table>

де $U=\sum n_{uv}\cdot u$, $V=\sum n_{uv}\cdot v$.

Добуток $n_{uv}\cdot u$ записують в правому верхньому куті клітинки, що містить значення частоти: $1\cdot(-2)=-2$; $5\cdot(-1)=-5$.

Сумуючи всі числа, розміщені в правих верхніх кутах кліток одного рядка результат поміщають в клітку того ж рядка в стовпці U :

$U=-2+(-5)=-7$.

Перемножуючи варіанту v на U одержаний добуток записують у відповідну клітку стовпця vU . Сумуючи всі числа стовпця vU одержимо $\sum_v vU=\sum n_{uv}uv$. Отже, $\sum_v vU=64$ і $\sum_v n_{uv}uv=64$.

Для контролю аналогічні обчислення виконують по стовпцях: добутки $n_{uv}\cdot v$ записують в лівий нижній кут клітки, яка містить значення частоти. Суму всіх одержаних результатів записують в рядок V . Додавши всі числа останнього рядка, одержимо суму, яка дорівнює $\sum n_{uv}uv$: $\sum_u uV=\sum n_{uv}uv$ =64.

Знайдемо шуканий вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_B=\frac{\sum n_{uv}uv-n\bar{u}\cdot\bar{v}}{n\sigma_u\cdot\sigma_v}=\frac{64-100\cdot 0,3\cdot 0,2}{100\cdot 0,768\cdot 1,14}=0,365.$$

Знайдемо кроки h_1 і h_2: $h_1=16-6=10$; $h_2=9-5=4$.

Знайдемо $\bar{x}$ та $\bar{y}$: $\bar{x}=\bar{u}\cdot h_1+c_1=0,3\cdot 10+13=16$;

$\bar{y}=\bar{v}\cdot h_2+c_2=0,2\cdot 4+26=26,8$.

Знайдемо σ_x та σ_y :

$\sigma_x=h_1\cdot\sigma_u=10\cdot 0,768=7,68$, $\sigma_y=h_2\cdot\sigma_v=4\cdot 1,14=4,56$.

Знайдемо шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X:

$y-\bar{y}=r_b\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(x-\bar{x})$, $y-26,8=0,365\cdot\dfrac{7,68}{4,56}(x-16)$,

$y-26,8=0,61\cdot(x-16)$, $y=0,61x+17,04$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y за даними, наведеними в кореляційній таблиці:

а)

$Y\ X$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n=50$

б)

$Y\ X$	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n=50$

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. У таблиці наведено емпіричні частоти n_i та теоретичні частоти n_i', обчислені, виходячи з гіпотези H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

Розв'язування.

Обчислимо емпіричне значення критерію Пірсона ($m=5$).

$$\chi^2_{сп.} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(10-14)^2}{14} + \frac{(20-18)^2}{18} + \frac{(8-7)^2}{7} +$$

$$+ \frac{(7-5)^2}{5} = 2,47.$$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів вільності для нормального розподілу) знаходимо $\chi^2_{kp}(0,05;2) = 6$. Отже, $\chi^2_{сп.} < \chi^2_{kp}$, тому гіпотезу H_0 приймаємо.

Задача 2. Із нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3,5$ одержано вибірку обсягом $n = 49$ і за нею знайдено вибіркове середнє $\bar{x} = 75,8$. Для рівня значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 75$ за наявності альтернативних гіпотез

а) $H_1 : a \neq a_0$; б) $H_1 : a > a_0$:

в) для $\bar{x} = 74,85$ розглянути альтернативну гіпотезу $H_1 : a < a_0$

Розв'язування.

Обчислимо емпіричне значення критерію за формулою $U = \dfrac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$.

$U_{емп} = \dfrac{(75,8 - 75)\sqrt{49}}{3,5} = 1,6$.

а) для альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq a_0$ знайдемо $u_{кр}$ за таблицею значень функції Лапласа $\Phi(u_{кр})$ $= \dfrac{1-\alpha}{2} = \dfrac{1-0,01}{2} = 0,495$.

Тоді $u_{кр} = 2,58$. Оскільки $u_{емп} = 1,6 < 2,58 = u_{кр}$, то приймаємо гіпотезу H_0.

б) для альтернативної гіпотези $H_1 : a > a_0$ знайдемо $u_{кр}$ за таблицею значень функції Лапласа, використовуючи формулу

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,01}{2} = 0,4.$$

Тоді $u_{кр} = 1,29$. Оскільки $u_{емп} = 1,29 < 2,58 = u_{кр}$, то приймаємо гіпотезу H_0.

в) якщо $\bar{x} = 74,85$, то $U_{емп} = \dfrac{(74,85 - 75)\sqrt{49}}{3,5} = -0,3$

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,01}{2} = 0,4 \text{ і } u_{кр} = 1,29.$$

Оскільки $U_{емп} = -0,3 > -1,29$, то гіпотезу H_0 приймаємо.

Задача 3. За вибіркою обсягом $n = 25$ з нормально розподіленої генеральної сукупності знайдено вибіркове середнє $\bar{x} = 67,11$ і підправлене середнє квадратичне відхилення $s = 0,5$. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 67$ за наявності альтернативної гіпотези а) $H_1 : a \neq a_0$; б) $H_1 : a > a_0$.

Розв'язування.

Обчислимо емпіричне значення критерію за формулою $T_{емп} = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$. $T_{емп} = \dfrac{(67,11 - 67)\sqrt{25}}{0,5} = 0,22$.

а) За таблицею критичних точок розподілу Ст'юдента за заданим рівнем значущості $\alpha = 0,05$ (для двосторонньої критичної області) і кількістю ступенів вільності $k = 25 - 1 = 19$ знаходимо критичну точку $t_{кр} = t_{кр}(0,05; 24) = 2,06$. Оскільки $T_{емп} = 0,22 < 2,06 = t_{кр}$, то гіпотезу H_0 приймаємо.

б) За таблицею критичних точок розподілу Ст'юдента за заданим рівнем значущості $\alpha = 0,05$ (для односторонньої критичної області) і кількістю ступенів вільності $k = 25 - 1 = 19$ знаходимо критичну точку $t_{кр} = t_{кр}(0,05; 24) = 1,71$. Оскільки $T_{емп} = 0,22 < 1,71 = t_{кр}$, то гіпотезу H_0 приймаємо.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1 = 9$ і $n_2 = 16$, взятими з нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдені підправлені вибіркові дисперсії $s_x^2 = 34,02$ і $s_Y^2 = 12,15$. При рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність підправлених дисперсій при конкуруючій гіпотезі $D(X) > D(Y)$.

2. У таблиці наведено емпіричні частоти n_i та теоретичні частоти n_i', обчислені, виходячи з гіпотези H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

n_i	7	12	22	9	6
n_i'	8	16	10	7	4

3. Застосовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,05, встановити, випадкова чи значима розбіжність між емпіричними частотами n_i і теоретичними частотами n_i', які обчислені, виходячи з гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності *X*:

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	6	7

4. За вибіркою об'ємом $n = 16$, вибраною з нормальної генеральної сукупності, знайдено вибіркову середню $\overline{x} = 118,2$ і підправлене середнє квадратичне відхилення $s = 3,6$. При рівні значущості 0,05, перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 120$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : a = 120$.

5. Із нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 40$ одержано вибірку обсягом $n = 64$ і за нею знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 136,5$. Для рівня значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 130$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : a \neq 130$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Задача 1. На складі друкарні міститься *m* нових віддрукованих видань книжок, причому *n* з них – науково-технічна література. Знайти ймовірність того, що серед *k* вибраних навмання книжок *l* будуть із серії науково-технічної літератури:

	m	*n*	*k*	*l*
1.1	10	7	3	2
1.2	9	5	3	1
1.3	15	12	5	4
1.4	12	8	9	5
1.5	20	8	9	3
1.6	25	8	5	4
1.7	20	8	8	5
1.8	22	6	4	4
1.9	18	10	6	3
1.10	20	9	9	2
1.11	15	10	4	1
1.12	16	9	7	3
1.13	18	7	5	2
1.14	20	6	6	6
1.15	25	9	4	2
1.16	20	8	3	1
1.17	15	10	5	3
1.18	10	8	2	1
1.19	12	9	4	2
1.20	20	15	5	3
1.21	16	12	3	2
1.22	12	8	2	1
1.23	14	7	4	3
1.24	15	9	2	1
1.25	13	10	5	2

Задача 2. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірність безвідмовної роботи (за час t) першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3. Знайти ймовірність того, що за час t безвідмовно будуть працювати:

а) лише один елемент; б) тільки два елементи;

в) всі три елементи; г) хоча б один елемент;

д) жодний елемент.

	p_1	p_2	p_3
2.1	0.08	0,06	0,5
2.2	0,06	0,07	0,01
2.3	0,1	0,15	0,2
2.4	0,2	0,2	0,3
2.5	0,3	0,25	0,4
2.6	0,4	0,15	0,3
2.7	0,5	0,2	0.15
2.8	0,6	0,4	0,15
2.9	0,25	0,35	0,2
2.10	0,3	0,12	0,15
2.11	0,15	0,3	0,25
2.12	0,7	0,35	0,2
2.13	0,3	0,4	0,25
2.14	0,15	0,25	0,2
2.15	0,3	0,12	0,35
2.16	0,05	0,08	0,1
2.17	0,04	0.06	0,02
2.18	0,01	0,04	0,26
2.19	0,03	0,5	0,25
2.20	0,05	0,08	0,02
2.21	0,04	0,08	0,02
2.22	0,09	0,04	0,03
2.23	0,1	0,07	0,2
2.24	0,09	0,04	0,03
2.25	0,1	0,07	0,2

Задача 3. Монету підкидають N разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде:

а) рівно k разів;

б) не менше m разів;

в) більше n разів.

	N	k	m	n
3.1	5	2	1	4
3.2	5	2	2	2
3.3	5	3	2	3
3.4	5	4	1	1
3.5	6	2	3	4
3.6	6	3	1	5
3.7	6	4	2	3
3.8	6	5	1	2
3.9	6	6	2	4
3.10	6	0	3	2
3.11	7	3	1	5
3.12	7	4	2	6

3.13	7	5	1	5
3.14	7	6	2	4
3.15	6	0	1	4
3.16	3	1	1	1
3.17	3	0	1	2
3.18	4	2	1	2
3.19	4	1	2	2
3.20	3	2	1	1
3.21	3	0	2	1
3.22	4	3	1	2
3.23	4	4	3	1
3.24	4	0	1	2
3.25	5	1	2	3

Задача 4. Дві книжкові фабрики виготовляють шкільні підручники та художню літературу. Перша фабрика виготовляє m % всіх книжок, друга n %. Продукція першої фабрики містить k % шкільних підручників, другої – l %. В магазин надходить продукція лише цих двох фабрик. Знайти ймовірність того, що:

а) куплена книжка в магазині є шкільним підручником.,

б) куплений в магазині шкільний підручник надрукований першою книжковою фабрикою:

	m	n	k	l
4.1	70	30	71	85
4.2	30	70	75	76
4.3	45	55	60	80
4.4	55	45	73	90
4.5	42	58	75	95
4.6	65	35	80	90
4.7	40	60	95	90
4.8	30	70	85	90
4.9	74	26	82	85
4.10	52	48	70	95
4.11	65	35	90	90
4.12	70	30	85	95
4.13	62	38	80	70
4.14	60	40	70	85
4.15	72	28	60	90
4.16	40	60	95	85
4.17	60	40	70	80
4.18	80	20	60	90
4.19	75	25	70	80
4.20	70	30	75	80
4.21	85	15	70	80
4.22	60	40	60	90
4.23	85	15	80	70
4.24	72	28	70	75
4.25	52	48	80	80

Задача 5. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює p. Знайти ймовірність того, що при N пострілах в мішень попадуть:

а) k разів;

б) менше k разів;

в) не менше k_1 і не більше k_2 разів.

	N	k	k_1	k_2	p
5.1	200	140	100	15	0,25

5.2	60	25	30	50	0, 4
5.3	100	20	35	50	0,3
5.4	150	50	70	100	0, 7
5.5	200	100	75	85	0,8
5.6	120	60	60	100	0,7
5.7	150	70	100	120	0,6
5.8	130	30	50	75	0,7
5.9	200	100	70	100	0,8
5.10	100	50	20	40	0,6
5.11	120	60	30	50	0,7
5.12	150	70	88	100	0,8
5.13	200	100	70	90	0.6
5.14	160	80	60	80	0.8
5.15	100	40	50	75	0.7
5.16	243	70	75	90	0.25
5.17	100	80	75	100	0.2
5.18	150	140	100	150	0.3
5.19	120	40	50	70	0.6
5.20	120	50	50	80	0.7
5.21	100	60	50	70	0.6
5.22	100	55	45	80	0.8
5.23	120	80	55	85	0.9
5.24	150	100	50	120	0.8
5.25	140	80	65	115	0,9

Задача 6. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, заданої законом розподілу.

	X	x_1	x_2	x_3
	p	p_1	p_2	p_3
6.1	X p	5 0,4	2 0,3	3 0,3
6.2	X p	3 0,4	7 0,5	8 0,1
6.3	X p	4 0,1	5 0,7	6 0,2
6.4	X p	7 0,1	9 0,8	12 0,1
6.5	X p	4 0,2	7 0,5	9 0,3
6.6	X p	3 0,4	9 0,1	11 0,5
6.7	X p	8 0,1	12 0,7	17 0,2
6.8	X p	12 0,2	13 0.2	14 0,6
6.9	X p	9 0,6	16 0,1	25 0,3
6.10	X p	2 0,1	3 0,4	5 0,5
6.11	X p	1 0,1	2 0,3	4 0,6
6.12	X	2	8	10

	p	0,4	0,1	0,5
6.13	X p	4 0,1	6 0,3	9 0,6
6.14	X p	7 0,4	10 0,1	13 0,5
6.15	X p	3 0,2	5 0,2	7 0,6

6.16	X p	4 0,2	5 0,3	10 0,5
6.17	X p	2 0,4	4 0,5	9 0,1
6.18	X p	13 0,6	14 0,1	16 0,3
6.19	X p	4 0,1	6 0,5	10 0,4
6.20	X p	2 0,1	5 0,5	6 0,4
6.21	X p	2 0,1	3 0,3	4 0,6
6.22	X p	4 0,1	9 0,7	16 0,2
6.23	X p	3 0,4	4 0,1	5 0,5
6.24	X p	4 0,3	7 0,4	10 0,3
6.25	X p	2 0,2	2 0,3	4 0,5

Задача 7. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої величини X відповідно дорівнюють a і σ. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу (α, β).

	a	σ	α	β
7.1	10	4	2	13
7.2	2	2	1	5
7.3	3	2	2	6
7.4	4	3	3	7
7.5	5	3	4	8
7.6	6	3	5	9
7.7	4	1	6	8
7.8	4	2	7	9
7.9	5	2	6	7
7.10	10	4	2	13
7.11	5	3	9	12
7.12	6	3	9	10
7.13	9	5	5	14
7.14	8	1	4	9
7.15	8	3	3	10
7.16	10	2	12	14
7.17	20	5	15	25
7.18	2	4	6	10
7.19	2	5	4	9

7.20	3	2	3	10
7.21	4	5	2	11
7.22	5	1	1	12
7.23	6	3	2	11
7.24	8	1	4	9
7.25	9	5	5	14

Задача 8. Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:
а) диференціальну функцію;
б) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X;
в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій.

8.1. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{якщо } 0<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4\ ;\end{cases}$$

8.2. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49}, & \text{якщо } 0<x\le 7,\\ 1, & \text{якщо } x>7\ ;\end{cases}$$

8.3 $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{64}, & \text{якщо } 0<x\le 8,\\ 1, & \text{якщо } x>8\ ;\end{cases}$$

8.4. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81}, & \text{якщо } 0<x\le 9,\\ 1, & \text{якщо } x>9\ ;\end{cases}$$

8.5. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{якщо } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{якщо } x>2\ ;\end{cases}$$

8.6. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, & \text{якщо } 0<x\le 6,\\ 1, & \text{якщо } x>6\ ;\end{cases}$$

8.7. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{якщо } 0<x\le 5,\\ 1, & \text{якщо } x>5\ ;\end{cases}$$

8.8. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{якщо } 0<x\le 3,\\ 1, & \text{якщо } x>3\ ;\end{cases}$$

8.9. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, & \text{якщо } 0<x\le 10,\\ 1, & \text{якщо } x>10\ ;\end{cases}$$

8.10. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{7}, & \text{якщо } 0<x\le 7,\\ 1, & \text{якщо } x>7\ ;\end{cases}$$

8.11. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ x^2, & \text{якщо } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1\ ;\end{cases}$$

8.12. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 2,\\ \dfrac{x}{2}-1, & \text{якщо } 2<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4\ ;\end{cases}$$

8.13. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ x^3, & \text{якщо } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1\ ;\end{cases}$$

8.14. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ x, & \text{якщо } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1\ ;\end{cases}$$

8.15. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ 2\sin x, & \text{якщо } 0<x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 1, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{6}\ ;\end{cases}$$

8.16. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le \dfrac{3}{4}\pi,\\ cos2x, & \text{якщо } \dfrac{3}{4}\pi<x\le \pi,\\ 1, & \text{якщо } x>\pi;\end{cases}$$

8.17. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le \frac{3}{2}\pi,\\ cosx, & \text{якщо } \frac{3}{2}\pi<x\le 2\pi,\\ 1, & \text{якщо } x>2\pi\,;\end{cases}$$

8.18. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le \frac{1}{2}\pi,\\ 1-\sin x, & \text{якщо } \frac{1}{2}\pi<x\le \pi,\\ 1, & \text{якщо } x>\pi\,;\end{cases}$$

8.19. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -\frac{1}{2}\pi,\\ cosx, & \text{якщо } -\frac{1}{2}\pi<x\le 0,\\ 1, & \text{якщо } x>0\,;\end{cases}$$

8.20. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \frac{1-\cos x}{2}, & \text{якщо } 0<x\le \pi,\\ 1, & \text{якщо } x>\pi\,;\end{cases}$$

8.21. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 2\pi,\\ \sin x, & \text{якщо } 2\pi<x\le \frac{5}{2}\pi,\\ 1, & \text{якщо } x>\frac{5}{2}\pi\,;\end{cases}$$

8.22. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 2,\\ \frac{x-2}{2}, & \text{якщо } 2<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4\,;\end{cases}$$

8.23. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ 3x^2+2x, & \text{якщо } 0<x\le \frac{1}{3},\\ 1, & \text{якщо } x>\frac{1}{3}\,;\end{cases}$$

8.24. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ 1-cosx, & \text{якщо } 0<x\le \frac{1}{2}\pi,\\ 1, & \text{якщо } x>\frac{1}{2}\pi\,;\end{cases}$$

8.25. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -1, \\ \frac{3}{4}(x+1), & \text{якщо } --1<x \le \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{якщо } x > \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Задача 9. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Знайти умовні закони розподілу складових X і Y.

9.1.

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,1	0,3	0,05

9.2.

Y	X		
	1	3	4
3	0,13	0,16	0,26
4	0,1	0,2	0,15

9.3.

Y	X		
	3	4	6
1	0,1	0,19	0,2
2	0,16	0,2	0,15

9.4.

Y	X		
	2	5	8
2	0,13	0,2	0,15
3	0,25	0,11	0,16

9.5.

Y	X		
	1	3	5
0	0,13	0,2	0,16
2	0,2	0,16	0,15

9.6.

Y	X		
	0	1	3
1	0,16	0,19	0,15
2	0,1	0,18	0,22

9.7.

Y	X		
	1	0	3
2	0,11	0,25	0,14
3	0,12	0,2	0,18

9.8.

Y	*X*		
	0	2	4
3	0,12	0,15	0,2
5	0,25	0,2	0.08

9.9.

Y	*X*		
	1	3	5
4	0,1	0,25	0,3
6	0,15	0,15	0,05

9.10.

Y	*X*		
	2	4	6
5	0,12	0,15	0,2
8	0,13	0,25	0,15

9.11.

Y	*X*		
	1	4	5
3	0,15	0,25	0,1
4	0,06	0,14	0,3

9.12

Y	*X*		
	2	3	4
1	0,13	0,12	0,25
0	0,12	0,18	0,2

9.13.

Y	*X*		
	3	4	5
2	0,12	0,18	0,22
4	0,13	0,1	0,25

9.14.

Y	*X*		
	4	5	6
2	0,13	0,18	0,25
3	0,12	0,22	0,1

9.15.

Y	*X*		
	3	4	5
2	0,12	0,3	0,13
5	0,1	0,15	0,2

9.16.

Y	*X*		
	2	3	4
1	0,1	0,15	0,25
4	0,13	0,12	0,25

9.17.

Y	*X*		
	3	4	5
1	0,12	0,14	0,15
2	0,16	0,3	0,13

9.18.

Y	X		
	1	2	4
2	0,15	0,25	0,2
5	0,25	0,05	0,1

9.19.

Y	X		
	2	4	5
2	0,1	0,25	0,15
3	0,12	0,13	0,25

9.20.

Y	X		
	1	0	2
1	0,12	0,25	0,25
3	0,13	0,1	0,15

9.21.

Y	X		
	1	2	3
2	0,12	0,25	0,1
5	0.13	0,25	0,15

9.22.

Y	X		
	2	1	0
1	0,13	0,1	0,3
3	0,15	0.12	0,2

9.23.

Y	X		
	2	4	5
2	0.17	0,25	0,2
4	0,15	0,13	0.1

9.24.

Y	X		
	1	2	3
2	0,16	0,23	0,2
5	0,15	0,14	0,12

9.25.

Y	X		
	2	3	5
3	0,34	0,16	0,1
5	0,12	0,18	0,1

Задача 10. З статистичного розподілу вибірки

x_1	x_i	x_2	. . .	$x_к$
n_1	n_i	n_2	. . .	$n_к$

Знайти вибіркову середню $\overline{x_в}$, дисперсію $D_в$, середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$ (дані для варіантів від 01 до 29 вибрати з наступних таблиць):

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	56	60	64	68	72	76	80
1	96	111	126	141	156	171	186

2	4	11	17	23	29	35	41
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7
0	3	7	10	40	20	12	8
1	2	5	7	18	10	4	3
2	5	8	13	26	20	7	2
3	1	2	5	7	4	3	2
4	6	10	14	16	9	6	3
5	3	8	20	31	12	4	3
6	4	11	25	30	15	10	5
7	5	8	12	19	10	7	3
8	2	8	10	13	9	6	1
9	4	5	6	8	7	4	2

Задача 11. Після обчислення в задачі 10 вибіркової середньої, дисперсії і середнього квадратичного відхилення знайти:

а) точкові оцінки математичного сподівання $M(X)$, дисперсії $D(X)$ і середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$ ознаки X генеральної сукупності;

б) інтервали надійності для оцінки з надійністю 0,99 математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності.

Задача 12. Знайти вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

регресії Y на X за даною кореляційною таблицею.

12.1.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.2.

Y \ X	15	20	25	30	35	40	n_y
25	4	2	–	–	–	–	6
35	–	6	4	–	–	–	10
45	–	–	6	45	2	–	53
55	–	–	2	8	6	–	16
65	–	–	–	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n =100

12.3.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	–	–	–	–	6
45	–	6	2	–	–	–	8
55	–	–	5	40	5	–	50
65	–	–	2	8	7	–	17
75	–	–	–	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	n =100

12.4.

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
10	2	4	–	–	–	–	6
20	–	6	2	–	–	–	8
30	–	–	3	50	2	–	55
40	–	–	1	10	6	–	17
50	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

12.5.

Y \ X	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	–	–	–	–	6
40	–	5	4	–	–	–	9
50	–	–	40	2	8	–	50
60	–	–	5	10	6	–	21
70	–	–	–	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n=100$

12.6.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2	–	–	–	–	6
45	–	5	3	–	–	–	8
55	–	–	5	45	5	–	55
65	–	–	2	8	7	–	17
75	–	–	–	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	$n=100$

12.7.

Y \ X	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	45	4	–	55
55	–	–	2	8	6	–	16
65	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	$n=100$

12.8.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
20	2	4	–	–	–	–	6
30	–	3	7	–	–	–	10
40	–	–	5	30	10	–	45
50	–	–	7	10	8	–	25
60	–	–	–	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n=100$

12.9.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
30	1	5	–	–	–	–	6
40	–	5	3	–	–	–	8
50	–	–	9	40	2	–	51
60	–	–	4	11	6	–	21
70	–	–	–	4	7	3	14

n_x	1	10	16	55	15	3	$n=100$

12.10.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
20	3	5	–	–	–	–	8
30	–	4	4	–	–	–	8
40	–	–	7	35	8	–	50
50	–	–	2	10	8	–	20
60	–	–	–	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n=100$

2.11.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	$n=100$

12.12.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	$n=100$

12.13.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	$n=100$

12.14.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	$n=100$

12.15.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17

55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.16.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.17.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.18.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.19.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.20.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.21.

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54

45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.22.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.23.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.24.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100

12.25.

X / Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	–	–	–	–	5
25	–	7	3	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	10	6	–	17
55	–	–	–	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	n =100