Лекція 4.
Границя функції. Теореми про границі функцій. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

1. Границя функції в точці.

Надалі, говорячи про границю функції $y=f(x)$ в точці x_0, будемо вважати, що функція $y=f(x)$ задана в деякому проколотому околі точки x_0.

Означення 1 ***(Коші, на мові "$\varepsilon-\delta$").*** *Число A називається* ***границею функції*** *$f(x)$ при x, що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх $x\in D(f)$, які задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Якщо число A є границею функції $f(x)$ в точці x_0, то пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ або $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Отже,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \left|\overset{def}{=}\right| \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in D(f):\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon .$$

Суть означення границі функції $f(x)$ в точці x_0 полягає в тому, що для всіх значень x, достатньо близьких до x_0, значення функції $f(x)$ за абсолютною величиною як завгодно мало відрізняються від числа A.

Приклад. Користуючись означенням Коші границі функції в точці, довести, що $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-3}=-5$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ у деякому околі точки $x_0=2$, який не містить точки $x=3$, наприклад, на інтервалі $(1{,}5;2{,}5)$. Тоді $\forall x\in(1{,}5;2{,}5)$ $|x-3|>0{,}5$ і $\left|\frac{2x+1}{x-3}+5\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}<14|x-2|$.

Візьмемо довільне додатне число ε. Якщо вибрати $\delta=\frac{1}{14}\varepsilon$, то для всіх $x\in(1{,}5;2{,}5)$, які задовольняють умову $0<|x-2|<\delta$, виконується нерівність $\left|\frac{2x+1}{x-3}+5\right|<\varepsilon$. За означенням Коші число $A=-5$ є границею функції $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ в точці $x_0=2$.

Вправа. Користуючись означенням Коші границі функції в точці, довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

Геометричний зміст границі функції в точці. Число A є границею функції $f(x)$ при $x\to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться такий проколотий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ відповідні ординати точок графіка функції $y=f(x)$ будуть міститися в смузі $A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$, якою би вузькою ця смуга не була (рис. 1).

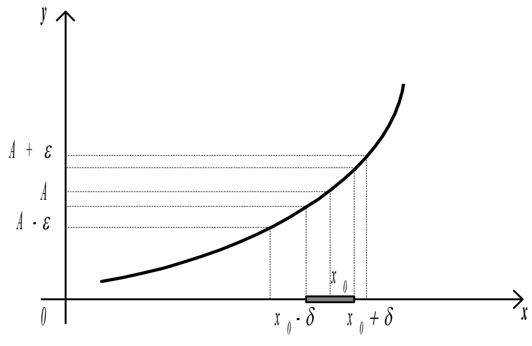


Рис. 1. Графічна інтерпретація означення границі функції в точці

Означення 2 ***(Гейне, на мові послідовностей).*** *Число A називається* ***границею функції*** *$f(x)$ в точці x_0, якщо $\forall\{x_n\}$ такої, що $x_n\to x_0$, $x_n\in D(f)$, $x_n\neq x_0$ виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.*

Теорема 1. *Означенням Коші і Гейне границі функції еквівалентні.*

Означення 3. $A \ne \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \{x_n\} \in D(f),\ x_n \ne x_0,\ x_n \to x_0 :\ f(x_n) \not\to A$.

Зауваження. Означенням Коші зручно користуватись для доведення існування границі. Означення Гейне, зазвичай, використовується для доведення того факту, що границі не існує.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не існує.

Розв'язання. Розглянемо дві послідовності: $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\pi n} = 0$ і

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 0$. Далі, $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, тому $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, а $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = 1$.

Отже, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не існує.

Зауважимо, що в означенні границі функції в точці ніяких умов на спосіб прямування x до x_0 не накладалось. Якщо ж $x \to x_0$ так, що $x > x_0$, то така границя називається ***правосторонньою*** границею функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Аналогічно $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ – ***лівостороння*** границя функції $f(x)$ в точці x_0, якщо $x \to x_0$ так, що $x < x_0$. Якщо $x_0 = 0$, то правосторонню і лівосторонню границі функції $f(x)$ в точці x_0 будемо позначати $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ відповідно. Запишемо ці означення за допомогою кванторів.

Означення 4.

$$b = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f):\ x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ \left| f(x) - b \right| < \varepsilon;$$

$$b = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f):\ x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ \left| f(x) - b \right| < \varepsilon.$$

Інколи пишуть: $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$; $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Приклад. Для функції $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ маємо $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1$ і $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1$.

Теорема 2. *Нехай функція $f(x)$ визначена в $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$, і навпаки.*

2. Границя функції в нескінченності.

З поняттям границі числової послідовності $x_n = f(n)$ тісно пов'язане поняття границі функції $y = f(x)$ в нескінченності. Якщо в першому випадку змінна n, зростаючи, приймає лише натуральні значення, то в другому випадку змінна x, змінюючись, набуває довільних значень.

Означення 5. *Число A називається **границею функції** $f(x)$ при x, що прямує до нескінченності, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $K > 0$ (воно залежить від ε : $K = K(\varepsilon)$), що для всіх x, які задовольняють умову $|x| > K$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

При цьому записують $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Якщо ж $x \to \infty$ так, що $x > 0$ $(x < 0)$, то кажуть, що число A є границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ і записують $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A\right)$.

3. Основні теореми про границі.

Для функцій, що мають границю, правильні наступні твердження (властивості).

Теорема 3.
1. Якщо границя функції в точці існує, то вона єдина.
2. Якщо точка $x = x_0$ разом з деяким околом належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то існує границя функції $f(x)$ при $x \to x_0$ і вона дорівнює $f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. Якщо $f(x), g(x), h(x)$ визначені в деякому околі точки a, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.
4. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ (a – скінченне число або дорівнює $\infty, +\infty, -\infty$), то:

а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B;$

б) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B;$

в) $\lim\limits_{x\to a}\big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = C \cdot A,$ *де* $C = const$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B},$ *якщо* $B \ne 0$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)\big]^{g(x)} = \Big[\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = A^B$, *якщо* $A > 0$;

е) якщо існує $\lim\limits_{y\to A} h(y)$, *то* $\lim\limits_{x\to a} h\big(f(x)\big) = \lim\limits_{y\to A} h(y)$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{3x+5}{x-5}$.

Розв'язання. Точка $x = 7$ разом з деяким околом належить області визначення елементарної функції $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-5}$. Тому $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{3x+5}{x-5} = \dfrac{3 \cdot 7 + 5}{7-5} = 13$.

4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Означення 6. *Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою при** $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.*
Наприклад, функції $y = x^2 - 9x$ і $y = \sin 2x$ є нескінченно малими при $x \to 0$.

Теорема 4. *$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ тоді і лише тоді, коли існує така функція $\alpha(x)$, нескінченно мала при $x \to x_0$, що $f(x) = b + \alpha(x)$.*

Доведення. *Необхідність.* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$. Покладемо $\alpha(x) = b - f(x)$. Тоді

$\lim\limits_{x\to x_0}\big[\alpha(x)\big] = \lim\limits_{x\to x_0}\big[b - f(x)\big] = b - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Достатність. $f(x) = b + \alpha(x)$. Тоді $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b + \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = b$.

Теорема 5. *Сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій при $x \to x_0$ є нескінченно мала функція при $x \to x_0$.*
Доведення безпосередньо випливає з теореми 2.
Означення 7. *Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою при** $x \to x_0$, якщо для довільного як завгодно великого числа $K > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, що задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > K$.*

Те, що функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \to x_0$, позначатимемо так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ і при цьому $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ в деякому проколотому околі точки x_0, то пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right)$.

Аналогічно, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, якщо для кожного числа $K>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x|>\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>K$.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x-7}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=-\infty$.

Для нескінченно малих і нескінченно великих функцій справедливі наступні твердження (властивості).

Теорема 6.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$*, то:*

а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=+\infty$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ $(A\neq 0)$*, то:*

а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\infty$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$*, то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

4. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *і* $f(x)\neq 0$ *в деякому проколотому околі точки* $x=a$*, то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

5. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *і* $g(x)$ *обмежена в деякому околі точки* $x=a$*, то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$.

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}$.

Розв'язання.

а) оскільки $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2x=0$ і $\forall x\in(\pi-\delta;\pi)\cup(\pi;\pi+\delta)$, де $\delta<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin 2x\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sin 2x}=\infty$.

б) оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, а $|\cos x|\le 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}=0$.

Зауваження. Інколи у діях над нескінченно малими і нескінченно великими функціями користуються символічними записами, а саме: для довільного $A>0$ $\dfrac{A}{+0}=+\infty$, $\dfrac{A}{-0}=-\infty$, $\dfrac{A}{0}=\infty$, $\dfrac{A}{+\infty}=+0$ $\dfrac{A}{-\infty}=-0$, $\dfrac{A}{\infty}=0$.

5. Невизначені вирази.

Часто при обчисленні границь функцій результат знаходження границі не очевидний. Кажуть, що $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (a – скінченне число або дорівнює $\infty,+\infty,-\infty$) є ***невизначеністю*** типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ і записують $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Аналогічно:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=\{\infty-\infty\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\{0\cdot\infty\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left\{0^0\right\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left\{\infty^0\right\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

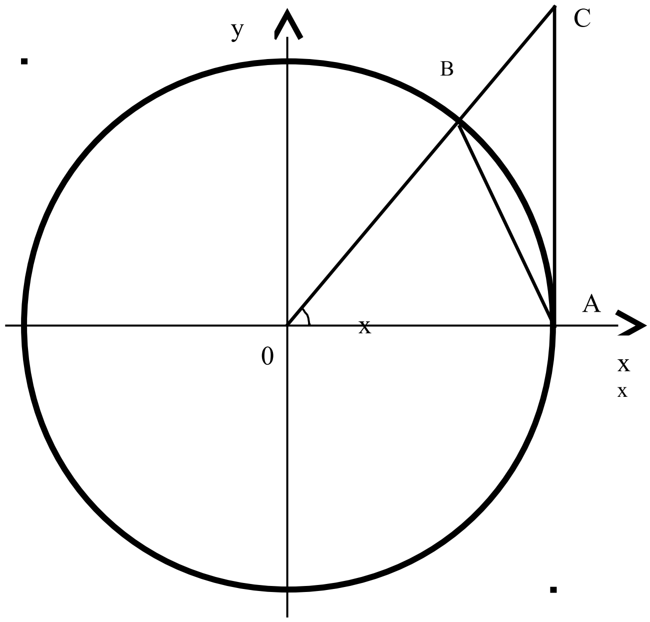
е) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left\{1^\infty\right\}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

6. Важливі границі.

1) Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Ця рівність називається ***першою важливою границею.***

Розглянемо круг радіуса R з центром в точці O. Нехай OA – нерухомий, а OB – рухомий радіус.

$\angle BOA = x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.



З елементарної математики відомо, що:

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin x,\quad S_{сектора\ AOB}=\frac{1}{2}R^2x,\quad S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot OC=\frac{1}{2}R\cdot R\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x.$$

Тому

$$S_{\Delta AOB}<S_{сектора\ AOB}<S_{\Delta AOC}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x\ \Rightarrow\ 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\ \Rightarrow\ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Перейдемо до границі при $x\to 0$ в обидвох частинах останньої нерівності. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\left\{1^\infty\right\}=e$ – ***друга важлива границя.***

Ірраціональне число $e\approx 2{,}7182818284...$ називається ***числом Ейлера***.

7. Методика обчислення границь.

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3}{5x^4+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^8-3x^2}}{3x^2+\sqrt{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Враховуючи, що поведінка чисельника і знаменника при $x\to\infty$ визначається членами з найбільшими показниками степенів (відповідно $2x^3$ і $5x^4$), поділимо чисельник і знаменник на x^4, тобто на вираз з найбільшим показником степеня x у чисельнику і знаменнику. Використовуючи теореми про границі функції, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3}{5x^4+x-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}}{5+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0-0}{5+0-0}=\frac{0}{5}=0\,.$$

Зауваження. Використовуючи цей самий прийом, можна показати, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\begin{cases}0, \textit{ якщо } n<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, \textit{ якщо } n=m,\\ \infty, \textit{ якщо } n>m.\end{cases}$$

б) Маємо невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Тут виразу в чисельнику умовно можна приписати степінь $n=\frac{8}{4}=2$, а виразу в знаменнику – $m=2$; оскільки $n=m$, то на підставі зауваження шукана границя дорівнює $1/3$. Дійсно, поділивши чисельник і знаменник дробу на x^2, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^8-3x^2}}{3x^2+\sqrt{x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{1-\frac{3}{x^6}}}{3+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}=\frac{1}{3}.$$

в) Для розкриття невизначеності типу $\{\infty-\infty\}$ помножимо і поділимо вираз в дужках на спряжений до нього вираз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{1+1}=1\,.$$

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2+4x-4}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8-3x}-2}{x}$.

Розв'язання. а) Для розкриття невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на множник $(x+2)$: скорочення можливе, бо при $x\to-2$ вираз $(x+2)$ прямує до нуля, але не дорівнює нулю. Отримаємо

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+4x-4}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to-2}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x-2}=\frac{3\cdot(-2)-2}{-2-2}=2.$$

б) Маємо невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Помноживши чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника, отримаємо:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}{\left(x^2+x-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4}{(x+2)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}=\frac{1}{3}\,.$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8-3x}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-3x}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{8-3x}\right)^2+2\sqrt[3]{8-3x}+4\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{8-3x}\right)^2+2\sqrt[3]{8-3x}+4\right)}=\lim_{x\to0}\frac{(8-3x)-8}{x\left(\left(\sqrt[3]{8-3x}\right)^2+2\sqrt[3]{8-3x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{\left(\sqrt[3]{8-3x}\right)^2+2\sqrt[3]{8-3x}+4}=-\frac{1}{4}.$$

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Розв'язання. а) Використовуючи першу важливу границю, отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 8x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}:\frac{\sin 8x}{8x}\right)=\frac{1}{2}(1:1)=\frac{1}{2}.$$

б) При $x\to 1$ маємо невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$. Зробимо заміну $1-x=y$, тоді $x=1-y$ і $y\to 0$ при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{y\to 0}y\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)=\lim_{y\to 0}y\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi y}{2}=\lim_{y\to 0}\left(\cos\frac{\pi y}{2}:\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{y}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi y}{2}:\left(\frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\right)=1:\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}3x=\infty$. На підставі другої важливої границі і теореми 3 про границю функції $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2\cdot 3x}{2x+1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+1}}=e^3.$$

б) $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\sqrt{e}.$$

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e$.

Зауваження. З останнього прикладу випливає, що для $a=e$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Вправа. Довести, що: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.