Лекція 3.
Границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей.

1. Означення границі послідовності.

Розглянемо числову послідовність, задану формулою загального члена $x_n = \dfrac{n+1}{n}$. Зобразимо її члени точками числової осі (рис. 1).

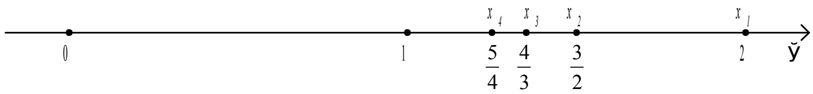

Рис.1.

Легко зауважити, що зі збільшенням n члени послідовності x_n як завгодно близько наближаються до одиниці. При цьому $|x_n - 1|$ з збільшенням n зменшується:

$$|x_1 - 1| = 1,\ |x_2 - 1| = \frac{1}{2},\ |x_3 - 1| = \frac{1}{3},\ |x_4 - 1| = \frac{1}{4}, \ldots, |x_n - 1| = \frac{1}{n}, \ldots$$

Більше того, для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ ми завжди можемо вказати такий номер n елемента послідовності, починаючи з якого $|x_n - 1| < \varepsilon$. Наприклад,

$$\varepsilon = 0{,}1:\quad |x_n - 1| < 0{,}1 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}1 \Rightarrow n > 10\,;$$

$$\varepsilon = 0{,}01:\quad |x_n - 1| < 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}01 \Rightarrow n > 100\,.$$

Ці міркування і лежать в основі означення границі послідовності.

Означення 1. *Число a називається **границею числової послідовності** $\{a_n\}$, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Той факт, що число a є границею послідовності $\{a_n\}$ записується так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ або $a_n \to a$ при $n \to \infty$. Якщо послідовність має границю, то вона називається ***збіжною***, у протилежному випадку – ***розбіжною***.

Означення 1'*(на мові околів).* *Число a називається **границею числової послідовності** $\{a_n\}$, якщо в довільному як завгодно малому ε - околі точки a містяться всі члени послідовності $\{a_n\}$, крім скінченного їх числа (рис. 2).*

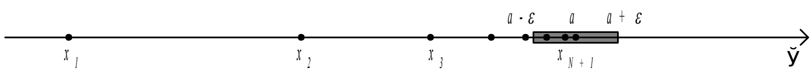

Рис. 2. Графічне зображення збіжної послідовності

Приклад. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Розв’язання. Потрібно довести, що для кожного додатного ε існує таке натуральне число N, що для довільного натурального $n > N$ правильна нерівність $\left|\dfrac{n+3}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Оскільки $\left|\dfrac{n+3}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$ для $n > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2\varepsilon} - 1\right)$, то нерівність $\left|\dfrac{n+3}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ виконується для довільного натурального $n > N = \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2\varepsilon} - 1\right)\right]$, де $[\ldots]$ – ціла частина числа.

Вправа. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3\,;\qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{2} n = 0\,.$$

Означення 2. *Число a не є границею послідовності $\{a_n\}$, якщо* $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N:\ |a_n - a| \ge \varepsilon$.

Вправа. Довести розбіжність вказаних послідовностей: 1) $a_n = (-1)^n$; 2) $a_n = \sin\frac{\pi}{2}n$.

Теорема 1 ***(про єдиність границі).*** *Збіжна числова послідовність може мати тільки одну границю.*

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{a_n\}$ має дві границі, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Тоді згідно з означенням 1 границі числової послідовності

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \ \forall n > N_1: \ |a_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \ \forall n > N_2: \ |a_n - b| < \varepsilon.$$

Тому, для $n > \max\{N_1; N_2\}$ з використанням нерівності трикутника отримаємо

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon,$$

звідки випливає, що $\forall\varepsilon > 0 \ |a-b| < 2\varepsilon$, і тому $a = b$.

2. Властивості збіжних послідовностей.

Теорема 2. *Збіжна послідовність обмежена.*

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді, згідно з означенням 1 границі послідовності для числа $\varepsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N: \ |a_n - a| < 1.$$

Нехай $d = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \ldots, |a_{N-1} - a|, 1\}$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n - a| \le d \ \Rightarrow \ a - d \le a_n \le a + d$. Отже, послідовність $\{a_n\}$ обмежена.

Теорема 3. ***(про проміжну послідовність).*** *Нехай для послідовностей $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ виконуються умови:*

1) $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \le b_n \le c_n$;

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Тоді послідовність $\{b_n\}$ збіжна: $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Доведення. Нехай число $\varepsilon > 0$ задане. Тоді

$$\exists N_1 = N(\varepsilon) \ \forall n > N_1: -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon,$$
$$\exists N_2 = N(\varepsilon) \ \forall n > N_2: -\varepsilon < c_n - a < \varepsilon.$$

Тоді $\forall n \ge \max\{N_1, N_2\}$ маємо $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon \ \Rightarrow \ |b_n - a| < \varepsilon$. Отже, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Теорема 4. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *і* $a < b$. *Тоді* $\exists N(b) \ \forall n \ge N(b): a_n < b$.

Теорема 5. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *і* $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \ge b$. *Тоді* $a \ge b$.

Теорема 6. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ *і* $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \le b_n$. *Тоді* $a \le b$.

Пропонуємо доведення теорем 4-6 провести самостійно.

Для послідовностей, що мають границі, справедливі такі твердження.

Теорема 7. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тоді:*

1) $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$, $c = const$;

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;

4) якщо $b \ne 0$, *то* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$;

5) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = a^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Доведемо рівність 2).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_1: \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \forall n>N_2:\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Позначимо $N=\max\{N_1;N_2\}$. Тоді $\forall n>N:\ |a_n+b_n-a-b|\le|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Аналогічно можна довести, що $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$.

Пропонуємо рівності 1), 3)-5) довести самостійно.

Означення 3.

1) Послідовність $\{a_n\}$ *називається* ***монотонно зростаючою****, якщо* $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n<a_{n+1}$.

2) Послідовність $\{a_n\}$ *називається* ***неспадною****, якщо* $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n\le a_{n+1}$.

3) Послідовність $\{a_n\}$ *називається* ***монотонно спадною****, якщо* $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n>a_{n+1}$.

4) Послідовність $\{a_n\}$ *називається* ***незростаючою****, якщо* $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n\ge a_{n+1}$.

5) Послідовності п. 1)-4) надалі будемо називати ***монотонними.***

Теорема 8. *Монотонна послідовність, яка є обмеженою, має границю.*

Біном Ньютона.

$n!\overset{def}{=}1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n,\ n\in\mathbb{N}$;

$C_n^k\overset{def}{=}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$; $\qquad C_n^0=C_n^n=1$, $\qquad C_n^0=1$.

Формула бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Приклад. Довести, що послідовність $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ має границю.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає. Дійсно,

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots1}{n!}\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогічно

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Очевидно, що $x_{n+1}\ge x_n$, бо в сумі доданків для x_{n+1} кожен доданок, починаючи з другого, є більшим за відповідний доданок у сумі для x_n $\left(1-\dfrac{s}{n}<1-\dfrac{s}{n+1}\right)$ і, крім того, сума для x_{n+1} містить на один додатний доданок більше ніж сума для x_n.

Тепер покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Оскільки $1-\dfrac{s}{n}<1$, то

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^n}.$$

Тому $2\le x_n<3$. Отже, $\{x_n\}$ − збіжна послідовність; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\overset{def}{=}e,\ \ e\approx2{,}718281828459\ldots$ − ірраціональне число.

Означення 4. *Послідовність* $\{\alpha_n\}$ *називається* ***нескінченно малою****, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Теорема 9. *Якщо* $\{\alpha_n\}$ *– нескінченно мала, а* $\{x_n\}$ *– обмежена, то* $\{\alpha_n x_n\}$ *– нескінченно мала.*

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ – обмежена, то $\exists b>0\ \forall n\in\mathbb{N}: |x_n|<b$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n>N:\ |\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{b}$. Тому $\forall n>N: |\alpha_n x_n|<|\alpha_n||x_n|<\dfrac{\varepsilon}{b}b=\varepsilon$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n x_n)=0$.

Означення 5. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***нескінченно великою****, якщо*

$$\forall C\in\mathbb{R}\ \ \exists N=N(C)\in\mathbb{N}\ \ \forall n\ge N:\ |x_n|\ge C.$$

Записують $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Теорема 10. *Якщо* $\{x_n\}$ *– нескінченно велика, то* $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ *– нескінченно мала.*

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ – нескінченно велика, то $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \forall n>N:\ |x_n|>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тому $\forall n>N:\ \left|\dfrac{1}{x_n}\right|<\varepsilon$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.

Теорема 11. *Нехай* $\{a_n\}$ *– обмежена,* $\{b_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$. *Тоді* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

Доведення випливає з теорем 9, 10.

Розглянемо послідовність $\{a_n\}$ і довільну зростаючу послідовність $\{m_k\}$ натуральних чисел:

$$1\le m_1<m_2<m_3<\ldots<m_k<m_{k+1}<\ldots\ .$$

Означення 6. *Послідовність* $\{a_{m_k}\}$ *називається* ***підпослідовністю*** *послідовності* $\{a_n\}$.

Іншими словами, підпослідовність – це послідовність, утворена з елементів деякої вихідної послідовності зі збереженням порядку слідування елементів.

Приклад. Послідовності $x_n^1=\dfrac{1}{2n-1}$, $x_n^2=\dfrac{1}{3n}$ є підпослідовностями послідовності $x_n=\dfrac{1}{n}$.

Теорема 12 (***Больцано-Вейерштраса).*** *Зі всякої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.*

Приклад. Послідовність $x_n=(-1)^n$ має дві збіжні підпослідовності: $x_n^1=(-1)^{2n}=1$, $x_n^2=(-1)^{2n-1}=-1$.

Означення 7. *Границя довільної збіжної підпослідовності називається її* ***частинною границею****.*

Означення 8. *Послідовність* $\{a_n\}$ *називається* ***фундаментальною*** *(або* ***послідовністю Коші****), якщо*

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \forall n>N\wedge\forall m>N:\ |a_m-a_n|<\varepsilon.$$

Теорема 13 *(критерій Коші).* *Для того, щоб послідовність була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.*