Тема 10.
Дослідження функцій за допомогою похідної

1. Зростання і спадання функцій.

Нагадаємо, що функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною) на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних $x_1, x_2 \in (a;b)$ при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

Теорема 1. ***(достатня умова монотонності).*** *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на $(a;b)$, тоді:*

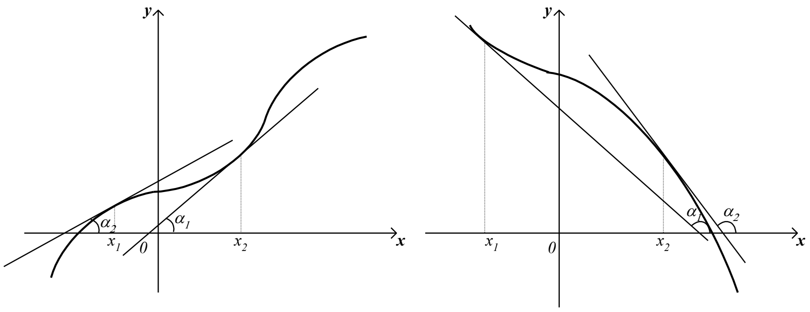
а) якщо $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) \geq 0\right)$ для всіх $x \in (a;b)$, то $f(x)$ зростає (не спадає) на $(a;b)$;

б) якщо $f'(x) < 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ для всіх $x \in (a;b)$, то $f(x)$ спадає (не зростає)на $(a;b)$;

в) якщо $f'(x) \equiv 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то $f(x)$ стала на $(a;b)$.

Доведення. Справедливість цих тверджень випливає із формули Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$, що справджується для будь-якої пари точок $x_1, x_2 \in (a;b)$ для деякого x, що міститься між x_1 та x_2.

Геометрична інтерпретація умови монотонності функції наведена на рисунку 1.



а) б)

Рис. 1. Зростаюча та спадна функція.

Якщо дотичні до кривої на деякому проміжку направлені під гострими кутами до осі абсцис (рис.1 а), то функція зростає, якщо під тупими (рис.1 б), то спадає.

Приклад. Знайти інтервали монотонності функцій: а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$; б) $y = 2x^2 - \ln x$.

Розв'язання.

а) Областю визначення даної функції є множина $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Знаходимо похідну функції: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Очевидно, що $y' > 0$ при $x < 1$ та $x > 3$ і $y' < 0$ при $1 < x < 3$, тобто функція зростає на інтервалах $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$ та спадає на інтервалі $(1;3)$ (рис. 2.).

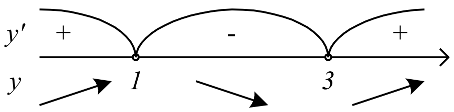


Рис. 2.

б) Функція $y = 2x^2 - \ln x$ визначена на множині $D(y) = (0; +\infty)$.

Знаходимо похідну: $y' = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2 - 1}{x} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x}$. Розв'язуючи нерівності $y' > 0$ і $y' < 0$ методом інтервалів, отримаємо, що дана функція зростає при $x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ і спадає при $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ (рис. 3).

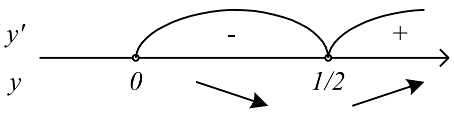


Рис. 3.

2. Екстремум функції.

Означення 1. *Точка* x_1 *називається точкою максимуму функції* $y = f(x)$, *якщо в деякому околі точки* x_1 *виконується нерівність* $f(x) \le f(x_1)$ (рис. 4).

Означення 2. *Точка* x_2 *називається точкою мінімуму функції* $y = f(x)$, *якщо в деякому околі точки* x_2 *виконується нерівність* $f(x) \ge f(x_1)$ (рис. 4).

Точки максимуму і мінімуму називаються ***точками екстремуму*** функції. Значення функції в точках x_1 і x_2 називаються відповідно ***максимумом і мінімумом*** функції. Максимум і мінімум функції об'єднуються під загальною назвою ***екстремуму*** функції. Екстремум функції часто називають ***локальним екстремумом***, підкреслюючи той факт, що поняття екстремуму пов'язане з достатньо малим околом точки екстремуму. Так що на одному проміжку функція може мати декілька точок максимуму і мінімуму.

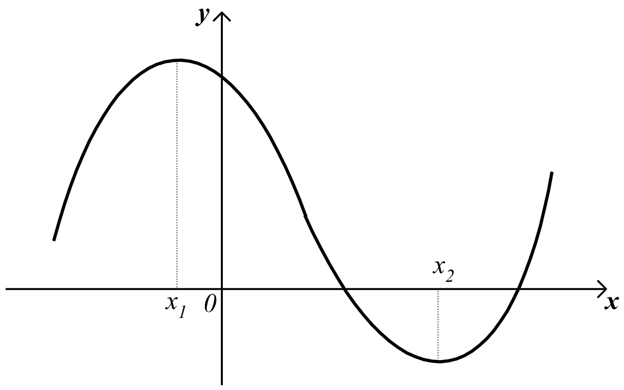


Рис. 4. Екстремуми функції.

Враховуючи теорему Ферма, можна сформулювати таку теорему

Теорема 2. ***(необхідна умова екстремуму)***. *Якщо функція* $y = f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю* $\left(f'(x_0) = 0\right)$ *або не існує.*

Іншими словами, функція $y = f(x)$ може мати екстремум тільки в тих точках, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Точки з області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними*** (або ***стаціонарними***) точками. Однак легко переконатись, що критична точка зовсім не обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на всій числовій осі (див. додаток 1). Похідна $y' = 3x^2$ в точці $x = 0$ дорівнює нулю, тобто $y'(0) = 0$, але екстремуму в цій точці немає.

Таким чином, для знаходження екстремумів функції потрібно додатково досліджувати критичні точки. Іншими словами, потрібно знайти достатню умову екстремуму**.**

Теорема 3. ***(перша достатня умова екстремуму).*** *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена і неперервна в деякому околі критичної точки* x_0, *а похідна* $f'(x)$ *існує в околі цієї точки, за винятком, можливо, самої точки* x_0. *Тоді:*

а) якщо $f'(x) > 0$ *(знак "+") при для всіх* $x < x_0$ *і* $f'(x) < 0$ *(знак "–") при для всіх* $x > x_0$, *то функція* $y = f(x)$ *в точці* x_0 *досягає максимуму;*

б) якщо $f'(x) < 0$ *(знак "–") при для всіх* $x < x_0$ *і* $f'(x) > 0$ *(знак "+") при для всіх* $x > x_0$, *то функція* $y = f(x)$ *в точці* x_0 *досягає мінімуму;*

в) якщо $f'(x)$ *не змінює знак, то екстремуму немає.*

Коротко можна сказати: якщо при переході через критичну точку x_0 похідна диференційовної функції $y = f(x)$ змінює свій знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму.

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум.

1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

2. Обчислити похідну $y' = f'(x)$.

3. Знайти критичні точки функції, тобто точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує.

4. Дослідити знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки і зробити висновок про наявність екстремумів функції.

5. Знайти екстремуми функції, тобто значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення даної функції $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

2.Обчислюємо похідну функції $y' = \dfrac{-2x(x+2) - (3 - x^2)}{(x+2)^2} = -\dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$.

3. Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо критичні точки функції:

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3.$$

Зауважимо, що в точці $x = -2$ похідна y' не існує, але ця точка не є критичною, оскільки вона не входить в область визначення функції.

4. На числову вісь наносимо область визначення функції і критичні точки (рис.5).

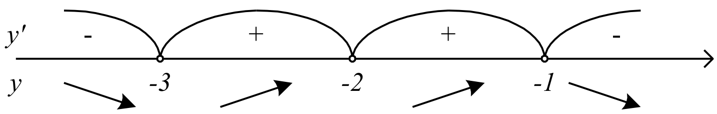


Рис. 5.

Для визначення знаку похідної зліва і справа від критичної точки $x = -3$ виберемо, наприклад, значення $x = -4$ і $x = -2{,}5$ і знайдемо $y'(-4) = -0{,}75 < 0$ і $y'(-2{,}5) = 3 > 0$;отже, $y' < 0$ при $x \in (-\infty; -3)$ і $y' > 0$ при $x \in (-3; -2)$.

Аналогічно встановлюємо, що $y' > 0$ на інтервалі $(-2; -1)$ і $y' < 0$ при $x \in (-1; +\infty)$. Згідно з достатньою умовою $x = -3$ – точка мінімуму даної функції, а $x = -1$ – точка максимуму.

5. Знаходимо $y_{\min} = y(-3) = \dfrac{3 - (-3)^2}{-3 + 2} = 6$, $y_{\max} = y(-1) = \dfrac{3 - (-1)^2}{-1 + 2} = 2$.

Теорема 4. ***(друга достатня умова екстремуму).*** *Нехай функція $y = f(x)$, визначена в околі стаціонарної точки x_0, має в x_0 похідні до порядку n включно $(n \geq 2)$. Якщо $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при непарному n у x_0 екстремуму немає, а при парному n екстремум є, причому це локальний мінімум; якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$ і локальний максимум, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Доведення проводиться на основі розкладу функції $y = f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0.

3. Найбільше і найменше значення функції.

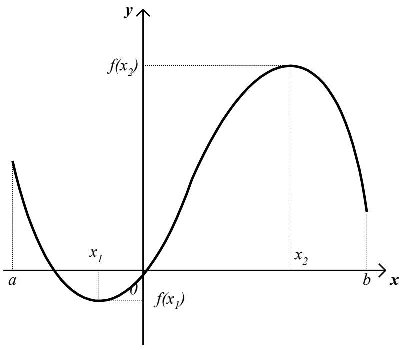
Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку найбільшого і найменшого значень. Найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a;b]$ позначають $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ та $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ і називають **глобальним максимумом** та **глобальним мінімумом** відповідно. Ці значення можуть досягатися у точках локального екстремуму або на кінцях проміжку (рис. 6).

Схема відшукання найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

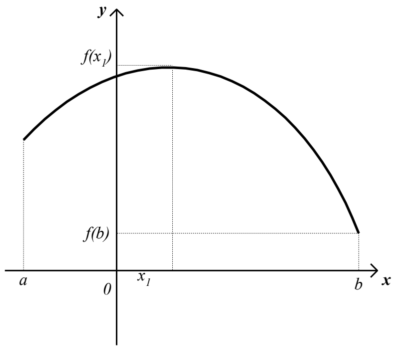
1. Знайти похідну $f'(x)$.

2. Знайти всі критичні точки на $[a;b]$, тобто точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує.

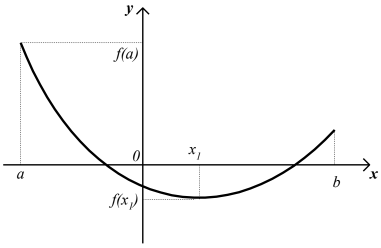
3. Обчислити значення функції в цих критичних точках та на кінцях відрізка і вибрати з них найбільше $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ та найменше $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.



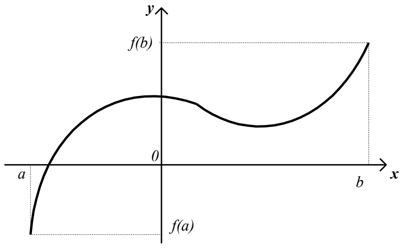
$$\max_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$$
$$\min_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$$



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$$
$$\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$$



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$$
$$\min_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$$



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$$
$$\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$$

Рис. 6. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = (x-2)^2 e^{-x}$ на відрізку $[0;5]$.

Розв'язання.

1. $f'(x) = 2(x-2)e^{-x} - (x-2)^2 e^{-x} = -e^{-x}(x-2)(x-4)$.
2. $f'(x) = 0$, звідки критичні точки $x_1 = 2,\ x_2 = 4\ \left(x_1, x_2 \in [0;5]\right)$.

3. Значення функції в критичних точках $f(2) = 0,\ f(4) = \dfrac{4}{e^4}$ і на кінцях відрізка $f(0) = 4$ і $f(5) = \dfrac{9}{e^5}$.

Отже, $\max\limits_{[0;5]} (x-2)^2 e^{-x} = f(0) = 4$, $\min\limits_{[0;5]} (x-2)^2 e^{-x} = f(2) = 0$.

4. Опуклість і вгнутість функції. Точки перегину.

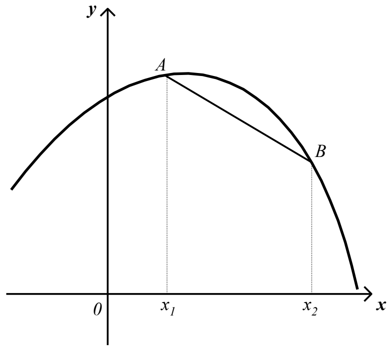
Означення 3. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***опуклою (опуклою вверх)*** *на інтервалі* $(a;b)$, *якщо для довільних двох точок* x_1, x_2 *з цього проміжку відрізок, що з'єднує точки* $A(x_1; f(x_1))$ *і* $B(x_2; f(x_2))$, *розміщений під графіком цієї функції* (рис. 7).

Означення 4. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***вгнутою (опуклою вниз)*** *на інтервалі* $(a;b)$, *якщо для довільних двох точок* x_1, x_2 *з цього проміжку відрізок, що з'єднує точки* $A(x_1; f(x_1))$ *і* $B(x_2; f(x_2))$, *розміщений над графіком цієї функції* (рис. 8).

Теорема 5. ***(достатня умова опуклості та вгнутості функції).*** *Нехай функція* $y = f(x)$ *двічі диференційовна на інтервалі* $(a;b)$. *Тоді:*

1) якщо $f''(x) > 0$ *на* $(a;b)$, *то функція вгнута на цьому інтервалі;*

2) якщо $f''(x) < 0$ *на* $(a;b)$, *то функція опукла на цьому інтервалі.*



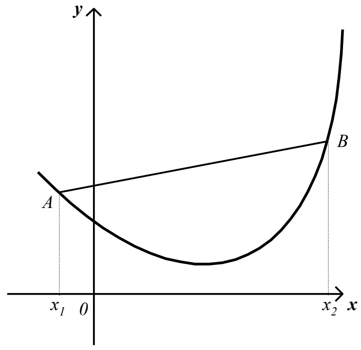


Рис. 7. Опукла функція. Рис. 8. Вгнута функція.

Означення 5. *Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, яка відокремлює інтервали, на яких функція опукла і вгнута.*

Теорема 6. ***(ознака точки перегину).*** *Якщо* $f''(x_0)=0$ *і* $f''(x)$ *при переході через точку* x_0 *змінює знак, то* x_0 *є точкою перегину графіка функції* $y=f(x)$.

Приклад. Знайти інтервали опуклості і вгнутості, точки перегину графіка функції
$y=x^4+2x^3-12x^2+3x-1$.

Розв'язання. Знайдемо другу похідну y'': $y'=4x^3+6x^2-24x+3$, $y''=12x^2+12x-24=12(x^2+x-2)$. Корені рівняння $y''=0$ – $x_1=1$ та $x_2=-2$. Оскільки $y''>0$ на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(1;+\infty)$, значить, на цих інтервалах функція вгнута; $y''<0$ на інтервалі $(-2;1)$, значить, функція на ньому опукла, а $x_1=1$ і $x_2=-2$ є точками перегину (рис.9). Значення функції в точках перегину $f(1)=-7,\ f(-2)=-55$.

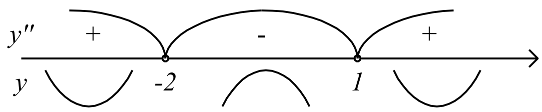


Рис. 9.

5. Асимптоти графіка функції.

До цього часу ми розглядали характерні точки графіка функції: точки екстремуму, точки перегину. Тепер розглянемо характерні лінії.

Означення 6. *Асимптотою графіка функції* $y=f(x)$ *називається пряма, яка володіє властивістю, що відстань від точки* $(x;f(x))$ *до цієї прямої стає як завгодно малою при необмеженому віддаленні точки графіка від початку координат.*

Розрізняють ***вертикальні*** (рис. 10 а) та ***похилі*** (зокрема ***горизонтальні***) (рис. 10 б, в) асимптоти.

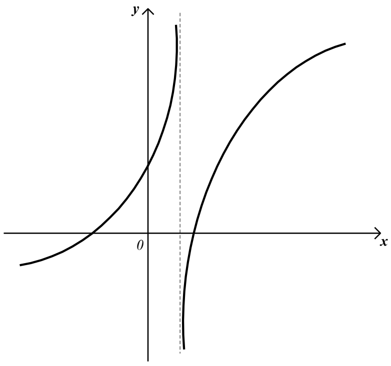
Знаходження асимптот графіка функції ґрунтується на наступних твердженнях.

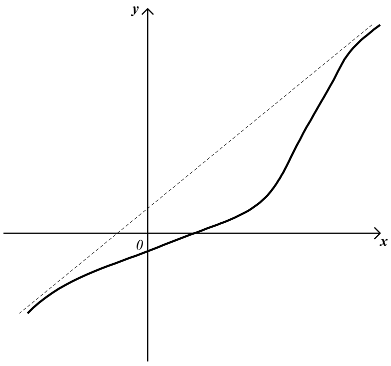
Теорема 7. *Пряма* $x=x_0$ *є вертикальною асимптотою графіка функції* $y=f(x)$*, якщо* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ *або* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$.

Наприклад, графік функції $y=\operatorname{tg}x$ має вертикальні асимптоти $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

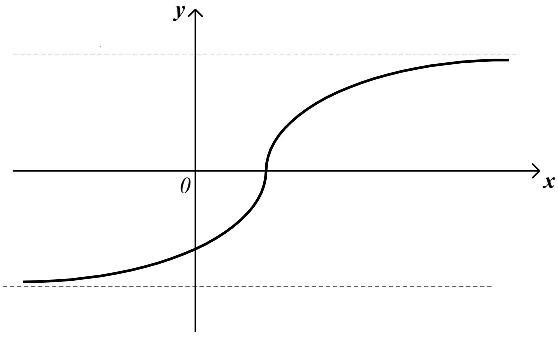
Теорема 8. *Якщо існують скінченні границі* $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ *і* $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$*, то* $y=kx+b$ *є похилою асимптотою графіка функції* $y=f(x)$.

Якщо обидві границі скінченні лише при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то пряма $y=kx+b$ є відповідно лише ***правосторонньою (лівосторонньою)*** похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$.





а) вертикальна асимптота; б) похила асимптота;



в) горизонтальна асимптота.

Рис. 10. Асимптоти графіка функції.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{2x^2+x+3}{x-1}$.

Розв'язання. З області визначення "випадає" точка $x=1$. Знайдемо границю функції при $x\to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+3}{x-1}=\infty$, звідки $x=1$ – вертикальна асимптота. Знайдемо похилу асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=2;\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+3}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=3.$$

Таким чином, $y=2x+3$ – похила асимптота графіка функції.

6. Загальна схема дослідження функцій і побудова їх графіків.

Вивчення характерних точок і ліній графіка функції дає можливість всебічно її дослідити і досить точно побудувати ескіз графіка. Дослідження функції рекомендується проводити за наступною схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2.Дослідити функцію на парність-непарність, на періодичність, знайти точки перетину графіка з осями координат та інтервали знакосталості функції.
3. Дослідити поведінку функції в нескінченності. Знайти вертикальні та похилі асимптоти графіка функції.
4. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функції.
5. Знайти інтервали опуклості і вгнутості функції та точки перегину.

Приклад. Провести дослідження і побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

Розв'язання. 1) Область визначення функції $D(y)=R\setminus\{2\}$.

2) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x-2)^2}=-\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$; отже, функція ні парна, ні непарна, неперіодична. При $y=0$ отримуємо $x=0$, тому графік проходить через точку $O(0;0)$; $y>0$ при $x\in(0;2)\cup(2;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(-\infty;0)$ (рис. 11).

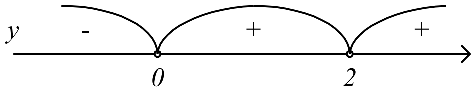


Рис. 11.

3) $x=2$ є точкою розриву функції; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{(x-2)^2}=+\infty$, тому $x=2$ є вертикальною асимптотою. Знайдемо похилі асимптоти: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=1$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{(x-2)^2}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x}{(x-2)^2}=4$.

Отже, $y=x+4$ – похила асимптота графіка функції. Поведінка функції при $x\to\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x-2)^2}=\infty$.

4) Знайдемо екстремуми функції та інтервали зростання і спадання: $y'=\dfrac{3x^2(x-2)^2-2(x-2)x^3}{(x-2)^2}=\dfrac{x^3-6x^2}{(x-2)^3}$.

Рівняння $y'=0$ має два корені: $x=0$; $x=6$, які є критичними точками функції. Розв'язуючи нерівності $y'>0$ $(y'<0)$ методом інтервалів (рис. 12), отримаємо: функція зростає при $x\in(-\infty;2)\cup(6;+\infty)$ спадає при $x\in(2;6)$; $x=6$ - точка мінімуму, $y_{\min}=y(6)=13{,}5$.

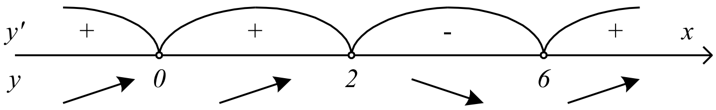


Рис. 12.

5) Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості: $y''=\dfrac{24x}{(x-2)^4}$. При $x\in(-\infty;0)$ функція опукла $(y''<0)$, при $x\in(0;2)\cup(2;+\infty)$ функція вгнута $(y''>0)$; $(0;0)$ – точка перегину (рис. 13).

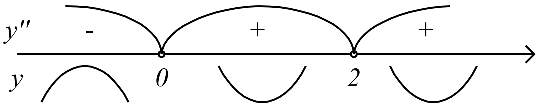


Рис. 13.

На основі проведених досліджень будуємо графік функції $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ (рис.14).

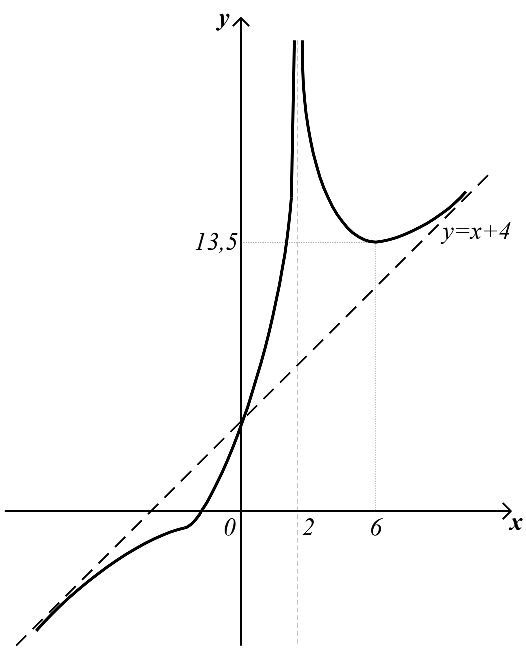


Рис. 14.