Лекція 7.
Похідна функції дійсної змінної.

1. Задачі, які приводять до поняття похідної функції.

Задача про швидкість руху матеріальної точки (задача Ньютона).

Нехай точка нерівномірно рухається вздовж деякої прямої за законом $s = s(t)$, де t – час, $s(t)$ – шлях, пройдений за час t. Знайдемо $v(t)$ – швидкість точки в момент t, яку називають ***миттєвою.***

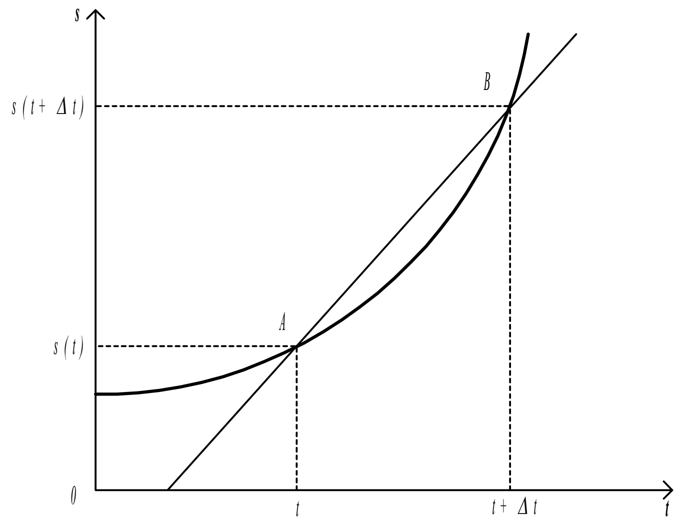

Рис. 1. Геометрична інтерпретація середньої швидкості руху

В момент часу t пройдений шлях дорівнює $s = s(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ – шлях $s(t+\Delta t) = s + \Delta s$ (рис. 1). Тоді за проміжок часу Δt середня швидкість визначається за формулою $v_{\text{сер.}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Очевидно, чим менший проміжок часу Δt, тим середня швидкість $v_{\text{сер.}}$ буде ближчою до $v(t)$. Отже, миттєву швидкість такибудемо ототожнювати з границею

$$v(t) \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача про дотичну (задача Лейбніца).

Розглянемо задачу про побудову дотичної до графіка функції. Нехай на площині задано графік неперервної функції $y = f(x)$ (рис.2).

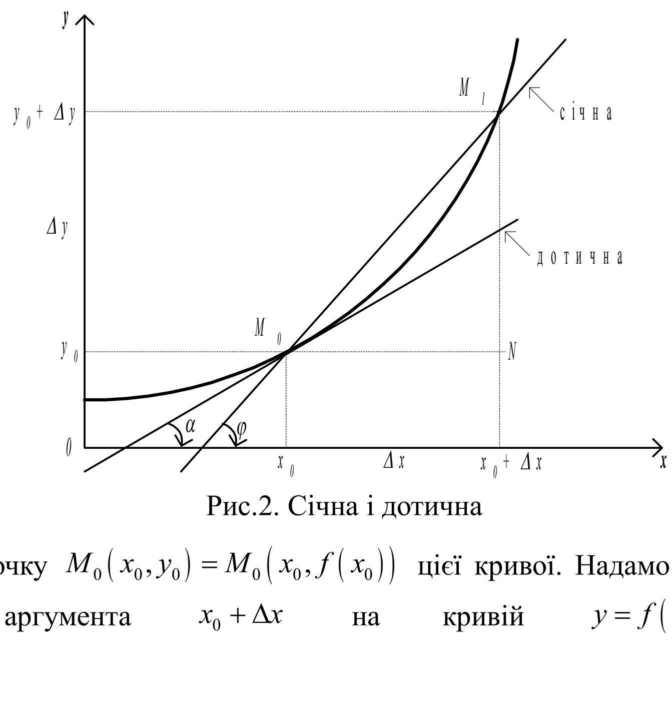

Рис.2. Січна і дотична

Розглянемо довільну точку $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0, f(x_0))$ цієї кривої. Надамо аргументу x_0 приріст Δx. Новому значенню аргумента $x_0 + \Delta x$ на кривій $y = f(x)$ відповідає точка

$M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = M_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Проведемо січну M_0M_1 – пряму, що проходить через точки M_0 та M_1.

Дотичною до кривої $y=f(x)$ в точці M_0 називають граничне положення січної M_0M_1 при наближенні точки M_1 до точки M_0 вздовж кривої, тобто при $\Delta x \to 0$.

Постановка задачі: написати рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, f(x_0))$.

Рівняння прямої, яка проходить через точку M_0, має вигляд: $y-f(x_0)=k(x-x_0)$. Потрібно знайти кутовий коефіцієнт $k=\mathrm{tg}\,\alpha$, де α – кут нахилу дотичної до осі Ox. Для січної M_0M_1 кутовий коефіцієнт $k_{M_0M_1}$ можна знайти з трикутника M_0M_1N: $k_{M_0M_1}=\mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{M_1N}{M_0N}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної

$$k \overset{def}{=} \lim_{\Delta x\to 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Означення похідної. Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функцій.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $(a;b)$. Візьмемо точку $x\in(a;b)$ і надамо їй приріст Δx такий, що $x+\Delta x\in(a;b)$. Тоді функція в цій точці отримає приріст $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$.

Означення 1. ***Похідною*** *функції* $y=f(x)$ *в точці* x *називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля (якщо ця границя існує):*

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції $y=f(x)$ має декілька позначень: y', $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$. Стосовно двох останніх позначень детально поговоримо пізніше. Запис y'_x означає, що похідна береться за незалежною змінною x. Інколи це варто підкреслити. Коли з умови задачі наперед відомо за якою змінною береться похідна, то індекс у її позначеннях, зазвичай, не пишуть.

Знаходження похідної функції в точці x називається ***диференціюванням*** цієї функції. Якщо функція в точці x має скінченну похідну, то така функція називається ***диференційовною*** в цій точці. Функція, диференційовна у всіх точках $(a;b)$, називається диференційовною на цьому проміжку. Позначення: $f(x)\in C^1(a;b)$.

Механічний зміст похідної: похідна функції шляху за часом в момент часу t_0 $s'(t_0)$ – це миттєва швидкість точки в цей момент: $v(t_0)=s'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x_0)$ є кутовий коефіцієнт дотичної до графіку функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, f(x_0))$. Отже, рівняння шуканої дотичної запишеться у вигляді: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Нехай до кривої $y=f(x)$ проведена дотична в точці $M_0(x_0, f(x_0))$.

Нормаллю до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ називається пряма, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику (рис. 3). На підставі умови перпендикулярності дотичної і нормалі кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а рівняння нормалі у випадку $f'(x_0)\neq 0$ запишеться у вигляді $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

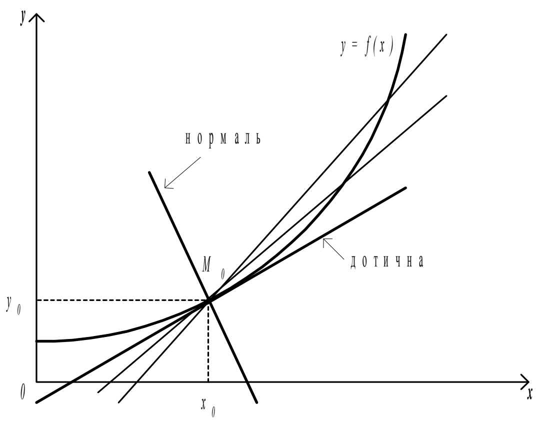

Рис.3. Дотична і нормаль

Приклад. Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:
а) $y = C$; б) $y = x^2$; в) $y = \sin x$.

Розв'язання.

а) Надамо змінній x приріст Δx, тоді функція y отримає приріст $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = C - C = 0$. Тому $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$.

б) Надамо змінній x приріст Δx, тоді функція y отримає приріст

$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Знаходимо відношення приросту функції до приросту аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. За означенням похідної отримуємо $y' = 2x$.

в) Знаходимо приріст функції $y = \sin x$: $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$. За формулою $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ отримаємо $\Delta y = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$.
Використовуючи першу важливу границю, отримаємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x+\Delta x}{2} = \cos x.$$

Оскільки існують односторонні границі, а похідна виражається через границі, то існують і односторонні похідні.

Означення 2. ***Правою (лівою) похідною*** *функції $y = f(x)$ в точці x називається права (ліва) границя відношення $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ справа (зліва), якщо такі границі існують, тобто*

$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \qquad f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Теорема 1. *Функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x тоді та тільки тоді, коли*

$$\left(\exists f'(x+0)\right) \wedge \left(\exists f'(x-0)\right) \wedge \left(f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)\right)$$

Приклад. Чи є функція $y = |x|$ диференційовною в точці $x = 0$?

Розв'язання. Згідно з означенням похідної

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}; \quad y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x > 0$, то $|\Delta x| = \Delta x$ і $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; якщо $\Delta x < 0$, то $|\Delta x| = -\Delta x$ і $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. Маємо $y'(0-0) = -1$, $y'(0+0) = 1$. Отже, функція $y = |x|$ не є диференційовна в точці $x = 0$. Геометрично це означає відсутність дотичної до кривої в точці $x = 0$ (рис. 4).

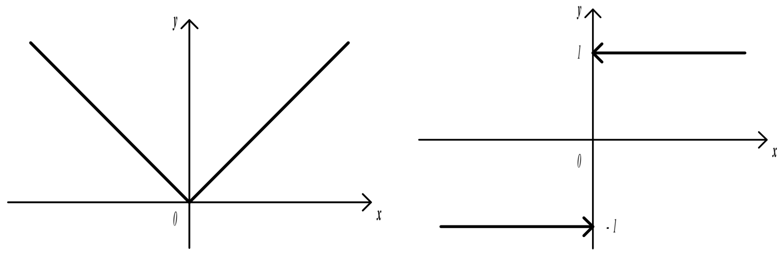

Рис.4. Функція $y = |x|$ та її похідна

Теорема 2. *Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.*

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Це означає, що існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. За властивістю границі функції маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Домножимо обидві частини рівності на Δx: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \alpha(\Delta x)$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(x_0) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \alpha(\Delta x) = 0$, а це є означенням неперервності функції в точці.

Зауваження. Обернене твердження неправильне: якщо функція неперервна в точці x_0, то вона не обов'язково диференційовна в цій точці. Наприклад, функції $y = |x|$, $y = \sqrt[3]{x^2}$ є неперервними в точці $x = 0$, але не диференційовними в цій точці (див., зокрема, попередній приклад).

3. Правила диференціювання.

Основні правила і формули диференціювання.

1. Похідна суми (різниці) двох диференційовних функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x).$$

Доведення. За означенням похідної отримуємо

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] \pm \left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює сумі добутку похідної першого множника на другий та добутку першого множника на похідну другого:

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Доведення. За означенням похідної

$$\left(u(x)v(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] + u(x)\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right]}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)u'(x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x)v'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

У ланцюжку рівностей використано теорему 2, з якої з диференційовності функції $v(x)$ в точці x випливає її неперервність у цій точці, а тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$.

3. Сталий множник можна винести за знак похідної:

$$\left(cu(x)\right)' = cu'(x), \quad c = const.$$

Доведення. $\left(cu(x)\right)' = c'u(x) + cu'(x) = cu'(x)$, бо $c' = 0$.

4. Похідна частки двох диференційовних функцій обчислюється за формулою:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

Довести самостійно.

5. Якщо функція $y = f(u)$ – диференційовна в точці u, а функція $u = \varphi(x)$ – диференційовна в точці x, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ також диференційовна в точці x, причому похідна її в точці x обчислюється за формулою

$$y'_x = f'_u(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \varphi'_x(x).$$

Доведення. Оскільки функція $y = f(u)$ диференційована в точці u, то $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$, тоді $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u)$, де $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$. Отже, $\Delta y = y'_u\,\Delta u + \alpha(\Delta u)\,\Delta u$. Оскільки функція $u = \varphi(x)$ диференційована в точці x, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$, тоді $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) + \beta(\Delta x)$, де $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \beta(\Delta x) = 0$. Маємо $\Delta u = \varphi'(x)\,\Delta x + \beta(\Delta x)\,\Delta x$. Підставляючи значення Δu у вираз для Δy отримаємо:

$$\Delta y = y'_u\,\varphi'(x)\,\Delta x + y'_u\,\beta(\Delta x)\,\Delta x + \alpha\left(\varphi'(x)\,\Delta x + \beta(\Delta x)\,\Delta x\right)\left(\varphi'(x) + \beta(\Delta x)\right)\Delta x.$$

Поділивши на Δx і перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, отримуємо $y'_x = y'_u\,\varphi'(x)$.

6. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x і $f'(x) \neq 0$, то обернена до неї функція $x = f^{-1}(y)$ (якщо вона існує) також диференційовна в точці y, причому похідна її обчислюється за формулою

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Довести самостійно.

Приклад. Використовуючи правила диференціювання, знайти похідні функцій:

а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \arcsin x$.

Розв'язання.

а) $y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x$;

б) $y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$.

Вправа. Вивести формули для похідних функцій $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Використовуючи означення похідної та правила диференціювання 1–6 можна вивести формули похідних основних елементарних функцій та складених функцій $f(u)$, де $u = u(x)$ (табл. 1).

Таблиця 1.

№п/п	Функція y	Похідна y'	№п/п	Функція y	Похідна y'
1.	C	0	10.	$\sin u$	$\cos u\, u'$
2.	x	1	11.	$\cos u$	$-\sin u\, u'$
3.	$u^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1} u'$	12.	$\mathrm{tg}\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u} u'$
4.	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} u'$	13.	$\mathrm{ctg}\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} u'$
5.	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} u'$	14.	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
6.	e^u	$e^u\, u'$	15.	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
7.	a^u	$a^u \ln a\, u'$	16.	$\mathrm{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2} u'$
8.	$\ln u$	$\frac{1}{u} u'$	17.	$\mathrm{arcctg}\, u$	$-\frac{1}{1+u^2} u'$
9.	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} u'$			

Приклад. Знайти похідні функцій:

а) $y = 3^{x^2} \ln^4 x + \sqrt[3]{\mathrm{tg}\, x}$;   б) $y = \dfrac{\mathrm{arctg} e^{2x}}{\sqrt{\sin 3x}}$.

Розв’язання.
а)

$$y' = \left(3^{x^2} \ln^4 x\right)' + \left(\sqrt[3]{\mathrm{tg} 2x}\right)' = \left(3^{x^2}\right)' \ln^4 x + 3^{x^2}\left(\ln^4 x\right)' + \left(\left(\mathrm{tg} 2x\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = 3^{x^2} \ln 3 2x \ln^4 x + \frac{3^{x^2} 4 \ln^3 x}{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 2x} \cos^2 2x};$$

б)
$$y' = \frac{\left(\mathrm{arctg} e^{2x}\right)' \sqrt{\sin 3x} - \mathrm{arctg} e^{2x} \left(\sqrt{\sin 3x}\right)'}{\sin 3x} = \frac{\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} \sqrt{\sin 3x} - \mathrm{arctg} e^{2x} \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}}{\sin 3x}.$$

Похідна степенево-показникової функції.

Розглянемо функцію $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Знайдемо $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$. Диференціюючи ліву і праву частини цієї формули за змінною x, отримаємо $\dfrac{1}{y} y' = \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Враховуючи, що $y = f(x)^{\varphi(x)}$, отримуємо формулу для похідної степенево-показникової функції:

$$y' = f(x)^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Зауваження. Похідна степенево-показникової функції дорівнює сумі похідної цієї функції як від степеневої функції та похідної цієї функції як від показникової функції.

Похідна логарифмічної функції $\left(\ln y\right)' = \dfrac{y'}{y}$ називається ***логарифмічною похідною***. Її зручно використовувати також для диференціювання функцій, вирази яких суттєво спрощуються при логарифмуванні.

Приклад. Знайти похідні функцій:

а) $y = x^{\sin 2x}$;   б) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}\sqrt{x^2-2}}{\sqrt[4]{3-x}}$.

Розв’язання.
а) Маємо степенево-показникову функцію. Відповідно до зауваження

$$y' = x^{\sin 2x}\left(2\cos 2x \ln x + \frac{\sin 2x}{x}\right).$$

б) Прологарифмуємо функцію: $\ln y = \frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2-2) - \frac{1}{4}\ln(3-x)$. Звідси

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3-x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt[3]{2x+1}\sqrt{x^2-2}}{\sqrt[4]{3-x}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3-x}\right).$$

Похідна функції, заданої параметрично.

Якщо функція $y = y(x)$ задана параметрично, тобто рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta,$ то похідна такої функції обчислюється за формулою:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = a\cos 3t, \\ y = a\sin 3t, \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. $y'_x = \dfrac{(a\sin 3t)'_t}{(a\cos 3t)'_t} = \dfrac{3a\cos 3t}{-3a\sin 3t} = -\operatorname{ctg} 3t$.

Похідна неявної функції.

Нехай рівняння $F(x,y) = 0$ визначає y як неявну функцію аргументу x. Щоб знайти похідну y', потрібно продиференціювати це рівняння за незалежною змінною x, вважаючи, що y є функцією змінної x, а потім з одержаного рівняння знайти y'.

Приклад. Обчислити y', якщо $x^2y^3 + \sin y - x = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння за незалежною змінною x:

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' + \cos y \cdot y' - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 + \cos y}.$$