РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ ДЕЯКИХ ТЕМ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

I. Вступ в аналіз.

1. Що називається функцією? Назвіть способи задання функції.
2. Згадайте основні елементарні функції і їх графіки. Які називаються парними, непарними , періодичними?
3. Дайте поняття неперервної функції і класифікацію точок розриву.
4. Дайте поняття границі функції в точці.
5. Сформулюйте і доведіть основні теореми про границі.
6. Виведіть формулу першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

7. Виведіть формулу другої важливої границі:

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Розв'язування типових задач.

При розв'язуванні наступних задач, слід запам'ятати такі табличні границі, які виникають із I-ої та II-ої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n},\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{nx}=\frac{m}{n},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{nx}=e^{mn},\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=e^{mn}.$$

Задача 1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5n^3-7n+100}{0.2n^3+205n}$

Розв"язування

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5n^3-7n+100}{0.2n^3+205n}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\frac{n^3}{n^3}-7\frac{n}{n^3}+100/n^3}{0.2\frac{n^3}{n^3}+205\frac{n}{n^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n^2}+100/n^3}{0.2+\frac{205}{n^2}}=\frac{5}{0.2}=25.$$

На цьому прикладі видно, що границя відношення двох дробово-раціональних функцій, аргумент яких прямує до нескінченності. Дорівнює відношенню їх старших коефіцієнтів.

Задача 2. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$

Розв"язування.

$$\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x/\cos x-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x*x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}*\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}*\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x^2\frac{x}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\ \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Задача 3. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$

Розв"язування. Зробимо заміну $x=\frac{\pi}{2}-y$. Якщо $x\to\frac{\pi}{2}$, то $y\to0$;

$cosx = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y$, тоді

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3\sec x} = \lim_{y \to 0} (1 + \cos y)^{\frac{3}{\sin y}} = \lim_{z \to 0} \left[(1 + z)^{\frac{1}{z}}\right]^3 = e^3 .$$

Тут знову використано заміну $z = \sin y(y \to 0 \Rightarrow z \to 0)$.

<u>Задача 4.</u> Знайти $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}$

<u>Розв"язування.</u> Помножимо чисельник і знаменник на величини спряжені до них.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{5 - x} - 2\right)\left(\sqrt{5 - x} + 2\right)\left(\sqrt{2 - x} + 1\right)}{\left(\sqrt{2 - x} - 1\right)\left(\sqrt{2 - x} + 1\right)\left(\sqrt{5 - x} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(5 - x - 4)\left(\sqrt{2 - x} + 1\right)}{(2 - x - 1)\left(\sqrt{5 - x} + 2\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)\left(\sqrt{2 - x} + 1\right)}{(1 - x)\left(\sqrt{5 - x} + 2\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

<u>Задача 5.</u> Знайти $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$.

<u>Розв"язання.</u> Розкладемо чисельник і знаменник на множники

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x + 1} = -\frac{1}{3}$$

<u>Задача 6.</u> Знайти $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

<u>Розв"язування.</u> Чисельник і знаменник при $x \to a$ дорівнює 0. Отже маємо невизначеність типу 0/0. Скористаємось правилом Лопіталя.

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(\sin x - \sin a)'}{(x - a)'} = \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

Цю задачу можна було б розв"язати і не використовуючи правило Лопіталя.

<u>II. Диференціальне числення функції однієї змінної.</u>

1. Згадайте задачі, що приводять до поняття похідної. Що називається похідною функції, який її геометричний та механічний зміст?
2. Доведіть основні теореми диференціювання.
3. Що таке складна функція? Як обчислити похідну складної функції?
4. Дайте поняття похідних вищих порядків. Який механічний зміст похідної другого порядку?
5. Що називається диференціалом функції? Який його геометричний зміст?
6. Сформулюйте і доведіть теореми: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші і правило Лопіталя.
7. Які необхідні і достатні умови зростання і спадання функції.
8. Дайте поняття випуклості і вгнутості графіка функції, точки перегину. Сформулюйте необхідні і достатні умови.
9. Дайте поняття асимптот графіка. Які бувають асимптоти.

<u>Розв''язування типових задач.</u>

<u>Задача 1</u> Знайти похідну функції y=ln sin x .

<u>Розв''язання.</u>

$$y' = (\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{1}{\sin x} * \cos x = ctgx$$

<u>Задача 2.</u> Знайти похідну функції $y = \sqrt{\sin 2x + 2^x}$

<u>Розв''язання</u>

$$y' = \left(\sqrt{\sin 2x + 2^x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x + 2^x}}\left(\sin 2x + 2^x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x + 2^x}}\left[(\sin 2x)' + \left(2^x\right)'\right] = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x + 2^x}}\left[\cos 2x(2x)' + \right.$$

$$+2^x \ln 2 \ \Big] = \frac{2\cos 2x + 2^x \ln 2}{2\sqrt{\sin 2x + 2^x}} = \frac{\cos 2x + 2^{x-1}\ln 2}{2\sqrt{\sin 2x + 2^x}}$$

Задача 3 Знайти похідну

функції $y = 3x^3 \arcsin x + \left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$

Розв''язання Використовуючи формули похідної добутку, одержимо

$$y' = 9x^2 \arcsin x + \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\sqrt{1-x^2} + \left(x^2+2\right)\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$y' = 9x^2 \arcsin x + \frac{3x^3 + 2x - 2x^3 - x^3 - 2x}{\sqrt{1-x^2}} = 9x^2 \arcsin x.$$

Задача 4 Знайти похідну функції $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

Розв''язання Похідну цієї функції можна обчислити безпосередньо, як похідну дробу. Однак це складає деякі труднощі. Тому прологарифмуємо цю функцію.

$\ln y = 3\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln(x-3)$, звідки знаходимо

$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{3(x-3)}$, підставивши замість y значення його виразу, одержимо

$$y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\left[\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{3(x-3)}\right].$$

Задача 5 Знайти похідну функції $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Розв''язання В даному випадку можна скористатись попереднім методом, а простіше використати формулу

$\left(U^V\right)' = VU^{V-1}U' + U^V \ln U V'$, де U=U(x), V=V(x).

$$y' = \frac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-1} + x^{\frac{1}{x}}\ln x\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}-2} - x^{\frac{1}{x}-2}\ln x = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

III. Дослідження функцій за допомогою похідних.

Задача1 Дослідити функцію $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ і побудувати її графік..

Розв’’язання

1. Область існування функції є множина $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.
2. Симетричність функції. $f(-x)\neq f(x); f(-x)\neq -f(x)$.
   Отже графік не має ні центра, ні осей симетрії.
3. Точкою розриву функції є x=-1 (знаменник дорівнює нулю)
4. Знайдемо асимптоти а) вертикальні асимптоти знайдемо прирівнявши до нуля знаменник: $2(x+1)^2$ =0; x=-1 – рівняння вертикальної асимптоти; б) горизонтальні асимптоти являються частковим випадком похилих асимптот y=kx+b при k=0. Коефіцієнти k і b знаходимо за формулами: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$.
   $$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x*2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\frac{1}{2},$$
   $$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^3-x}{(x+1)^2}=$$
   $=\frac{1}{2}(-2)=-1$ - похила асимптота.
5. Знайдемо інтервали зростання і спадання функції.
   Знаходимо першу похідну $y'=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.
   Знаходимо критичні точки : x_1=-3, x_2=0. Точка

x=-1 в якій $y' = \infty$ не розглядається, так як вона не входить у область визначення функції. Критичні точки і точка розриву ділять область існування функції на такі інтервали:
$1)(-\infty;-3);2)(-3;-1);3)(-1;0);4)(0;+\infty)$. У кожному із цих інтервалів похідна зберігає знак : у першому – плюс, в другому – мінус , в третьому – плюс , в четвертому – плюс (щоб в цьому переконатись необхідно у кожному із цих інтервалів взяти довільне значення x і обчислити при ньому значення y) .Послідовність знаків першої похідної записується так :+,-,+,+. Значить в інтервалі (-∞;-3) функція зростає ,в інтервалі (-3;-1) – спадає ,в інтервалах (-1;0) і (0;+ ∞) – зростає .Звідси видно , що проходячи через критичну точку x=-3 зліва направо , похідна міняє знак із плюса нс мінус .Значить в точці з абсцисою x=-3 функція досягає максимуму $y_{мах}$=--27/8 .Отже ,точка A(-3;-27/8) є точкою максимуму.

6. Знайдемо інтервали опуклості і вгнутості графіка функції і точки перегину. Знайдемо ,що $y'' = -3x/(1+x)^4$. Прирівнявши y'' до нуля ,одержимо x=0 .Ця точка ділить інтервали існування функції на такі частини :1)($-\infty$;-1); 2)(-1;0); 3)(0; $+\infty$) . В кожному із цих інтервалів друга похідна скінчена і зберігає свій знак :в першому – мінус ,в другому – мінус ,в третьому –плюс . Значить в інтервалах $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ крива опукла ,а в інтервалі $(0;\ +\infty)$ - вгнута .Переходячи через точку x=0 друга похідна міняє свій знак , Значить , при x=0 крива має точку перегину , координати якої O(0;0) .
7. Для більш повної уяви графіка функції доцільно знайти ще деякі його точки , наприклад ,точки

перетину графіка з осями координат ,дослідити функцію на парність та періодичність. Всі одержані дані наносимо на малюнок і одержимо графік кривої .

V Невизначені інтеграли .

1. Дайте поняття первісної і неозначеного інтеграла .
2. Запам”ятайте таблицю основних інтегралів .
3. Оволодійте основними методами інтегрування , а також методами інтегрування дробово-раціональних функцій , виразів , що містять квадратний трьохчлен , і деякого класу тригонометричних функцій .

Обчислення деяких інтегралів.

Приклад 1. Знайти $I=\int\left(5x^6-\frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}\right)x^{\frac{1}{3}}dx$.

$$I=\int\left(5x^6-\frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}\right)x^{\frac{1}{3}}dx=\int\left(5x^{\frac{19}{3}}-\frac{1}{5}x^{-\frac{5}{12}}\right)dx=$$

$$5\int x^{\frac{19}{3}}dx-\frac{1}{5}\int x^{-\frac{5}{12}}dx=\frac{15}{22}x^{\frac{22}{5}}-\frac{12}{35}x^{\frac{7}{12}}+c.$$

Приклад 2. Знайти $I=\int x\sqrt{x^2+4}dx$

Враховуючи , що $d(x^2+4)=2xdx$ можемо записати

$xdx=\frac{d(x^2+4)}{2}$, тоді

$$I=\frac{1}{2}\int\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}d(x^2+4)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4)^3}+c$$

Приклад 3 . Знайти $I=\int x^2e^x dx$

Використовуємо формулу інтегрування частинами :

Приймемо $u = x^2, dv = e^x dx,$ тоді $du = 2xdx, v = e^x$.

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$ Знову використовуємо формулу інтегрування частинами , прийнявши $u = x, e^x dx = dv$, тоді $du = dx, v = e^x$

$$I = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x)dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

<u>Приклад 4.</u> Знайти $I = \int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}$

Виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат : $x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2x * 3 + 9 - 9 + 7 = (x+3)^2 - 16$,а потім зробимо заміну $t = x + 3(dt = dx)$.

$$I = \int \frac{dx}{(x+3)^{2-16}} = \int \frac{dx}{t^2 - 4^2} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + c = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+7}\right| + c$$

<u>Приклад 5 .</u> Знайти $I = \int \frac{6x+1}{x^2 - 6x + 8}dx$

Виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат : $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$,замінивши t=x-3(dt=dx) одержимо

$$I = \int \frac{6x+1}{x^2 - 6x + 8}dx = \int \frac{6(t+3)+1}{t^{2-1}}dt = 3\int \frac{2tdt}{t^2 - 1} + 19\int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= 3\ln\left|t^2 - 1\right| + \frac{19}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = 3\ln\left|x^2 - 6x + 8\right| + \frac{19}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + c$$

<u>Приклад 6 .</u> Знайти $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

Виділимо в підкореневому виразі повний квадрат :

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x * 5/2 + 25/4 - 25/4 + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Зробимо заміну $t = x - \frac{5}{2}(dt = dx)$, одержимо

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x - \frac{5}{2}) - (\frac{1}{4})^2}} = \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right| + c = \ln\left|x - \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}\right| + c.$$

Приклад 7 . Знайти $I = \int \frac{2 - 5x}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} dx$.

Виділимо в підкореневому виразі повний квадрат :

$$4x^2 = 9x + 1 = 4\left(x^2 + 2 * \frac{9}{8}x + \frac{81}{64} - \frac{81}{64} + \frac{1}{4}\right) = 4\left[\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{65}{64}\right]$$

зробимо заміну t=x+$\frac{9}{8}$, тоді dt=dx.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(2 - 5x)dx}{\sqrt{\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{65}{64}}} = \frac{1}{2}\int \frac{2 - 5\left(t + \frac{9}{8}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{65}{64}}} = -\frac{5}{4}\int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2 - \frac{65}{64}}} +$$

$$+ \frac{61}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{65}{64}}} = -\frac{5}{2}\int \sqrt{t^2 - \frac{65}{64}} + \frac{61}{16}\ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{65}{64}} + C\right| =$$

$$= -\frac{5}{2}\sqrt{x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{16}{64}} + \frac{61}{16}\ln\left|x + \frac{9}{8} + \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{16}{64}}\right| + C.$$

Приклад 8 Знайти $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$

Ми бачимо, що ступінь косинуса дорівнює, є непарним числом. Тому запишемо так:

$$I=\int\frac{\cos^2 x\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\cos xdx.$$

Зробивши заміну z=sinx(тоді dz=cosxdx), одержимо

$$I=\int\frac{1-z^2}{z^2}dz=\int\frac{dz}{z^2}-\int dz=-\frac{1}{z}-z+C=C-\sin x-\frac{1}{\sin x}.$$

<u>Приклад 9.</u> Знайти $\int\sin^4 x\cos^2 xd$.

Тут синус і косинус в парних степенях. Тому використовуєм формули пониження степенів:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

$$I=\int\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2*\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)^2*(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2d(\sin 2x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

<u>Приклад 10.</u> Знайти $I=\int\frac{dx}{\cos x}$.

Використовуємо універсальну підстановку : $t=tg\frac{x}{2}$,

звідки $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

<u>Приклад 11.</u> Знайти $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Показники радикалів перед інтегральної функції дорівнюють 2 і 3. Їх найменше спільне кратне буде 6. Тому слід зробити заміну змінної $x=t^6$ (тоді $dx = 6t^5dt$).Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\left(t - arctgt\right) + C.$$

Так як $t = \sqrt[6]{x},$ то $I = 6\left(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + C.$

VI Визначені інтеграли.

1. Сформулюйте задачі, до поняття визначеного інтегралу
2. Доведіть теорему про похідну визначеного інтеграла по змінній верхній границі.
3. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
4. Запам’’ятайте основні методи обчислення визначених інтегралів (заміна змінної, інтегрування частинами).
5. Запишіть основні формули застосування визначених інтегралів (площа плоских тіл, об’’єм тіл обертання, довжина дуги).
6. Дайте поняття невластивих інтегралів першого та другого родів.

Розв’’язування типових задач.

1 Обчислення площі плоскої фігури.

Якщо фігура має вигляд зображений на рис. 3 то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f\left(x\right)dx \quad (12)$$

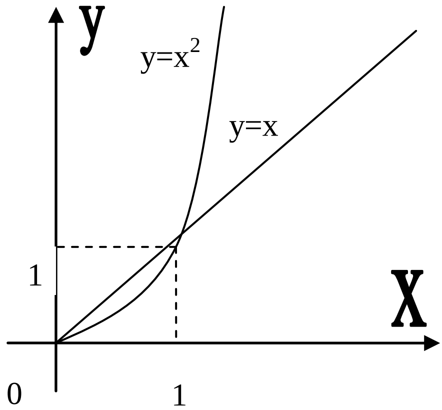
Для фігури, зображеної на рис. 4 площу знаходимо за такою формулою

$$S=\int_a^b \left[f_2(x)-f_1(x) \right] dx. \quad (13)$$

Задача 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями y=x? y=x^2 /

Розв”язування. Будуємо графіки функцій і знаходимо координати точок перетину

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x=x^2 \Rightarrow x_1=0; x_2=1.$$



За формулою (13) знаходимо

$$S=\int_a^b \left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\,кв.од.$$

Задача 2. Знайти площу фігури, обмеженої віссю ОХ і однією аркою циклоїди

$$\begin{aligned} x&=t-\sin t \\ y&=1-\cos t \end{aligned} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Розв”язування. У даному випадку площу знаходимо за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

$$S=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)dt=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left[1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]dt=$$

$$=\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi \text{ кв.од.}$$

2 Обчислення довжини дуги і кривої.

Якщо гладка крива задана рівнянням y=f(x). До довжина l її дуги дорівнює $l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$ (14)

Якщо крива задана параметричним рівнянням $y=\gamma(t), y=\gamma(t),$

$t_1 \le t \le t_2$ то $l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\gamma'(t)]^2}\,dt$ (15)

у випадку просторової кривої x=x(t), y=y(t), z=z(t), $t_1 \le t \le t_2$;

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt. \qquad (16)$$

Задача 3. Знайти довжину дуги астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t,$ $0 \le t \le 2\pi$.

Розв''язування Зробимо рисунок.

$x'(t)=-3\cos^2 t\sin t,$

$y'(t)=3\sin^2 t\cos t,$

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d(\sin t)=$$

$$=\frac{3}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}.$$ l=6 од.

Задача 4. Знайти довжину дуги лінії $y=x^{\frac{3}{2}}, 0 \le x \le 4.$

Розв''язання. Маємо $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$

$$l=\int_0^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{9}{4}\left.\frac{\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)од.$$

Обчислення об”єму тіл обертання.

Об’єм тіла, отриманого при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої лініями y=f(x), x=a, x=b, y=0 навколо осі OX знаходимо за формулою $V=\pi\int_a^b y^2dx$ (рис. 5)

Задача 5. Знайти об”єм тіла, обертанні фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ y=0, x=1, навколо осі OX (рис. 6)

Розв”язання. $V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx=$

$$=\pi\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}\pi x^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}\,куб.од.$$

VII Невластиві інтеграли.

Невластиві інтеграли бувають двох видів першого і другого роду. Невластиві інтеграли першого роду – це інтеграли з безмежними границями інтегрування:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx;\quad \int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx.$$

До невластивих інтегралів другого роду відносяться інтеграли від розривних функцій. Якщо функція y=f(x) визначена і неперервна на пів інтервалі $(a,b]$ і необмежена в довільному околі точки а, то невластивим інтегралом від функції f(x) на інтервалі $[a,b]$ називається границя

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{E\to 0} \int_{a+E}^b f(x)dx.$$

Якщо функція f(x) необмежена в околі точки b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{E\to 0} \int_a^{b-E} f(x)dx\,.$$

Нарешті, якщо $C \in [a,b]$ - особлива точка інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

<u>Задача 7.</u> Обчислити інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, або встановити його розбіжність.

<u>Розв”язування.</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = -0 + 1 = 1$$

Інтеграл збіжний.

<u>Задача 8.</u> Дослідити інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+3}$ на збіжність.

<u>Розв”язування</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+3} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{d(2x+3)}{2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln|2x+3|\Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|2b+3| - \ln 5\right) = +\infty\,.$$

Отже, цей інтеграл розбіжний.

Задача 9. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$, або встановити його розбіжність.

Розв’’язання.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} arctg(x+1)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(arctg1 - arctg(a+1)\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(arctg(6+1) - arctg1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Інтеграл збіжний.

Задача 10. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, або встановити його розбіжність.

Розв’’язання. Особлива точка a= 0.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{E\to0}\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{E\to0}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_E^1 = \lim_{E\to0}\left(2-2\sqrt{E}\right) = 2.$$

Інтеграл збіжний.