ЛЕКЦІЯ 2: РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ.

Відокремлення коренів. Метод поділу відрізка пополам. Метод дотичних. Метод хорд. Комбінований метод. Метод ітерації.

Теоретичні засади методів розв'язання нелінійних рівнянь.

1. Постановка задачі

Нехай потрібно розв’язати рівняння з однією змінною

$$f(x)=0, \qquad (2.1)$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку $[a, b]$. Відомо, що розв'язком рівняння називають множину його коренів, тобто таких значень $x \in [a, b]$, при яких рівняння (2.1) перетвориться в тотожність. Якщо функція $f(x)$ - многочлен, то рівняння (2.1) називається *алгебричним.* Якщо ж функція $f(x)$ містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, тоді рівняння (2.1) називається *трансцендентним.*

Універсальних методів для знаходження точних значень коренів алгебраїчних рівнянь степеня $n > 5$ і трансцендентних рівнянь не існує. Крім того, розв'язуючи практичні задачі, часто дістають рівняння з коефіцієнтами, які є наближеними числами. Тоді постановка задачі знаходження точних коренів не має змісту і їх слід визначати наближено з достатньою для практики точністю.

Знаходження наближених коренів рівняння (2.1) складається з двох етапів:

- відокремлення коренів, тобто знаходження проміжків, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь рівняння;
- обчислення коренів з наперед заданою точністю.

2. Відокремлення коренів

Корінь x рівняння (2.1) вважається відокремленим на відрізку $[c,d] \subseteq [a,b]$, якщо на цьому відрізку дане рівняння не має інших коренів. Щоб відокремити корені рівняння (2.1), треба розбити область визначення даного рівняння на проміжки, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь або немає жодного кореня. Відокремлювати корені можна графічним або аналітичним методами, а також методом послідовного перебирання.

Для відокремлення коренів *графічним методом* достатньо побудувати графік функції $y = f(x)$ і знайти його точки перетину з віссю абсцис та кінці відрізків $[c,d] \subseteq [a,b]$.

3. Метод поділу відрізка навпіл

Метод поділу відрізка навпіл (або метод дихотомії) дає можливість уточнити значення кореня рівняння (2.1) з певною наперед заданою точністю.

Припустимо, що x^* - апріорі невідоме точне значення кореня рівняння (2.1) на проміжку відокремлення $[c,d]$, а ε - його гранична абсолютна похибка. Ідея методу полягає в тому, що на першому кроці відрізок $[c,d]$ ділять навпіл точкою $g = 0.5*(c+d)$ і обчислюють $f(g)$. Якщо $f(g)=0$, то зрозуміло, що $x = g$ є точним значенням кореня. Якщо ні, то перевіряється умов $f(c)f(g)<0$ або $f(d)f(g)<0$, тобто визначається той проміжок, на кінцях якого функція має протилежні знаки. Тут використовується міркування, що якщо функція неперервна і змінює знак, то у якійсь точці x на цьому вибраному проміжку вона рівна нулю. Обраний проміжок перепозначаємо до вигляду $[c_1,d_1]$ і повторюємо процедуру його поділу навпіл на другому кроці. Так продовжуємо поки на деякому k-ому кроці не виконається умова $d_k - c_k < 2\varepsilon$, яка означає, що $\left|x^* - g_k\right| < \varepsilon$ і значення $x = g_k$ буде шуканим наближеним коренем з точністю ε.

Метод дихотомії легко реалізується на ЕОМ, але потребує значного обсягу обчислень, щоб досягти високої точності наближеного кореня.

4. Метод дотичних

Нехай рівняння (2.1) на проміжку $[a,b]$ має ізольований корінь x^*, тобто $f(a)f(b)<0$, функції $f(x)$, $f'(x)$ є неперервними і, крім цього, $f'(x)$ зберігає знак на $[a,b]$.

Далі слід дослідити зростаючою чи спадною є $f(x)$ на проміжку $[a,b]$, чи її графік опуклий чи вгнутий. Для цього будуємо похідні функції $f'(x)$, $f''(x)$. Дотичну проводимо до того кінця графіку на проміжку, в якому знаки функції та її другої похідної співпадають (Рис. 2.1). Точку перетину дотичної з віссю Ox вважаємо першим наближенням кореня x_1

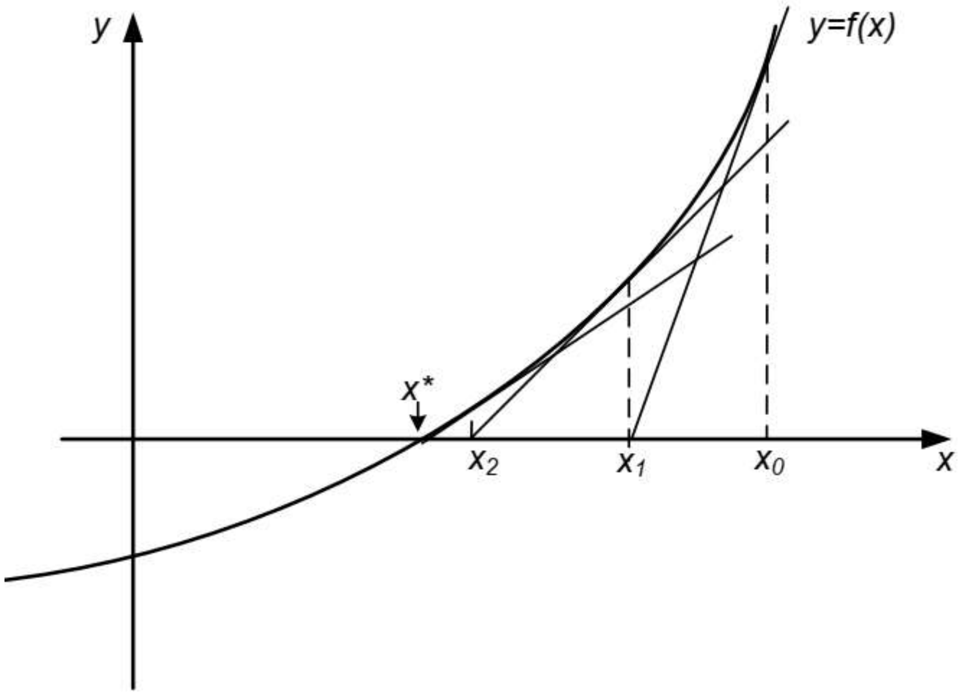

Рис.2.1

Далі за формулою

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)} \; \left(i = 1, 2, ...\right) \qquad (2.2)$$

розраховуємо друге і наступні наближення кореня x_i. Процес побудови дотичних до функції в точках x_i і, відповідно, знаходження точок їх перетину з віссю Ox (наступних наближень кореня) продовжується доти, поки не буде досягнута задана точність ізольованого кореня: $\left|x_{i+1} - x_i\right| < \varepsilon$.

5. *Метод хорд*

Метод хорд (метод лінійного інтерполювання, метод пропорційних частин, або метод хибного положення) є одним з поширених ітераційних методів пошуку наближеного кореня рівняння (2.1).

Нехай функція $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ має ізольований корінь x^*, тобто $f(a)f(b) < 0$, і похідні функції $f'(x)$, $f''(x)$ є неперервними і зберігають знаки на $[a,b]$.

Ідея методу хорд в тому, що на проміжку $[a,b]$ дугу кривої $y = f(x)$ замінюють хордою і абсциса точки перетину хорди з віссю Ox вважається першим наближенням значення кореня x_1 (Рис. 2.2). Наступні наближення кореня (1) визначаються формулою

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)\left(b - x_i\right)}{f\left(b\right) - f\left(x_i\right)} \; \left(i = 1, 2, ...\right) \qquad (2.3)$$

поки не буде досягнута задана точність ізольованого кореня: $\left|x_{i+1} - x_i\right| < \varepsilon$.

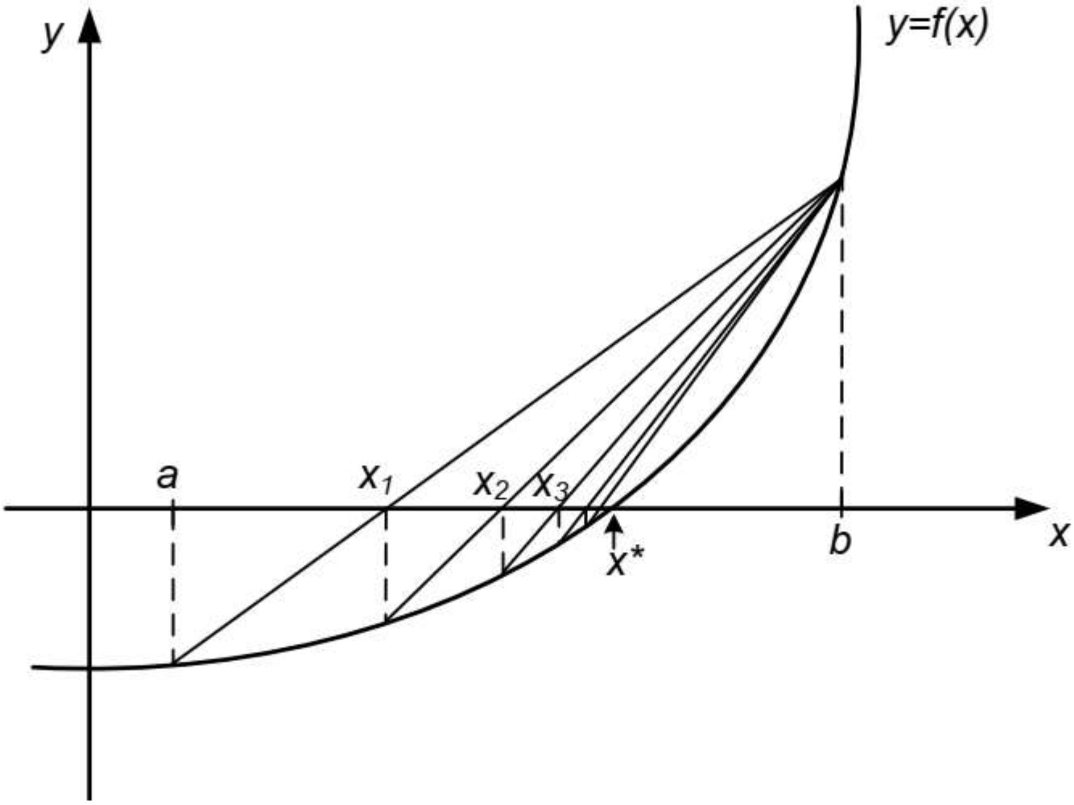

Рис.2.2

6. Комбінований метод

Характерною особливістю методів дотичних та хорд є те, що послідовності їх наближень $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ є монотонними. Причому, якщо для даного рівняння послідовність наближень методу хорд монотонно спадна, то послідовність наближень методу дотичних - монотонно зростаюча, і навпаки. Одночасне застосування цих методів дає змогу наближатися до кореня рівняння з двох боків, дістаючи наближення з недостачею і надлишком (Рис. 2.3).

Розглянемо рівняння (1), яке має корінь $x^* \in [a,b]$. За початкове наближення в методі хорд вибирають точку $x = a$, а в методі дотичних - точку $x = b$. На першому кроці застосовуємо по черзі методи дотичних і хорд. У результаті отримуємо нові наближення a_1, b_1, які вважаємо новими межами проміжку кореня. Для знаходження нового наближення продовжуємо процедуру звуження проміжку ізоляції кореня вже на $[a_1, b_1]$. Такий процес продовжуємо доти, поки довжина відрізка $[a_i, b_i]$ стане меншою або дорівнюватиме величині 2ε, де ε - наперед задана точність кореня.

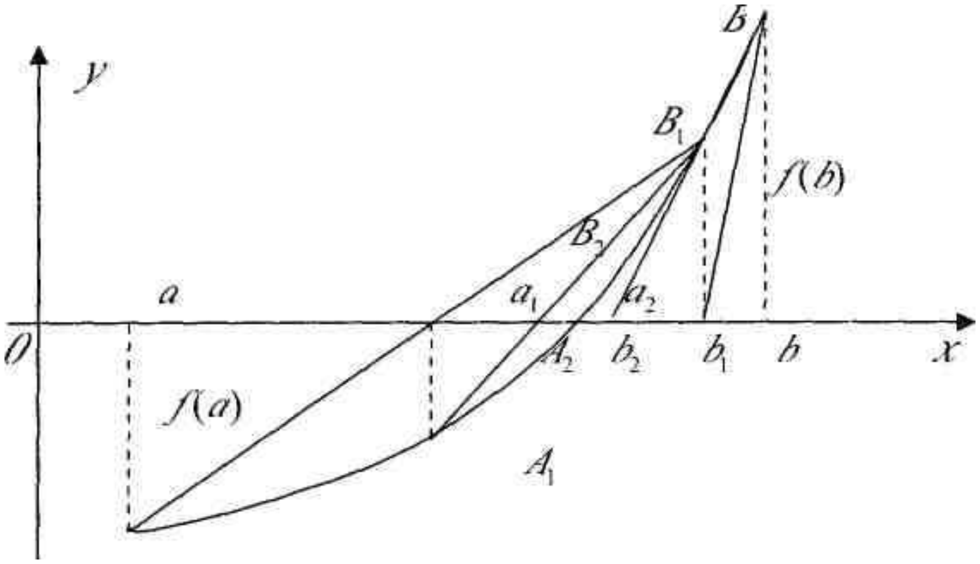

Рис. 2.3.

7. Метод ітерації

Нехай задано рівняння (2.1), де *f{x)* - неперервна функція. Щоб знайти корені цього рівняння замінимо його еквівалентними перетвореннями рівносильним

$x = \varphi(x)$, (2.4)

Далі для розв'язування (2.4) пропонується наступна схема методу послідовних наближень (методу ітерації). Вибирається з певних міркувань деяке початкове наближення x_0 і всі наступні наближення послідовно обчислюються за формулою:

$x_{i+1} = \varphi(x_i)$ $(i = 0,1,2,...)$. (2.5)

Якщо послідовність $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ має границю $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$, то ця границя вважається коренем рівняння (2.4) і метод збіжним. Збіжність послідовності забезпечується вибором функції $\varphi(x)$ та початкового наближення x_0. Для гарантування збіжності методу ітерацій розв'язування рівняння (2.4) рекомендовано обирати $\varphi(x)$ у вигляді

$\varphi(x) = x + \alpha f(x)$, (2.6)

де α – певний параметр, що підбирається з міркувань виконання умови

$|\varphi'(x_0)| < 1$ (2.7)

Умова збіжності (2.7) випливає з теореми, що визначає достатні умови збіжності методу ітерацій рівняння (2.4) і називається умовою Ліпшиця. При виконанні умов цієї теореми метод ітерацій є самокорегуючим методом, тобто помилки, допущені при обчислені наближень x_k (якщо вони не виходять за межі відрізка *Я),* виправляються автоматично оскільки помилкові значення можна розглядати як нові початкові наближення.

Практичні засади методів розв'язання нелінійних рівнянь в пакеті матричних обчислень Scilab (Mathlab).

Для розв’язування трансцендентних рівнянь в Scilab застосовують функцію **fsolve(x0,f),** де $x0$ – початкове наближення, а f – функція, що описує ліву частину (2.1). Для прикладу розглянемо рівняння

$$f(x)=\frac{e^x}{5}-2(x-1)^2.$$

Відокремимо корені графічним способом. На рис. 2.4 помітно, що графік тричі перетинає вісь абсцис, тобто має три корені.

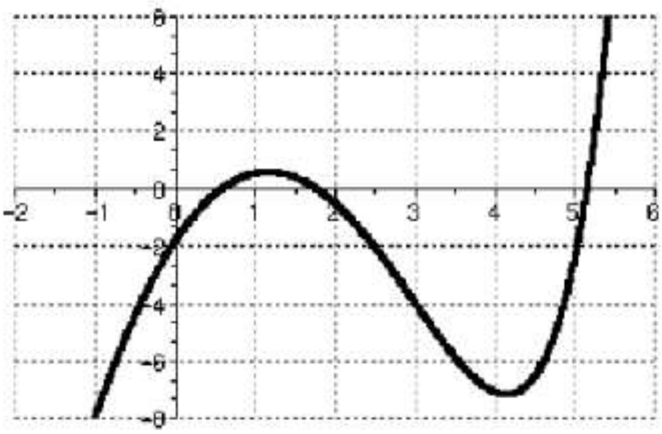

Рис. 2.4.

Тепер послідовно викликаючи функцію **fsolve** з різними початковими наближеннями легко отримуємо всі розв’язки заданого рівняння

```
-->//Розв’язати рівняння  f(X)=0
-->deff(‘[y]=f(x)’,’y=exp(x)/5-2*(x-1)^2’)
-->x(1)=fsolve(0,f);
-->x(2)=fsolve(2,f);
-->x(1)=fsolve(5,f);
-->x
X  =
   0.5778406
   1.7638701
   5.1476865
```

Проте, доцільніше задавати початкові наближення як вектор. Тоді

```
-->fsolve([0;2;5],f)
ans  =
   0.5778406
   1.7638701
```

5.1476865

Роглянемо інший приклад. Нехай потрібно знайти корені рівняння $\sin(x) - 0.4x = 0$ на проміжку $[-5\pi; 5\pi]$

```
-->deff('[y]=ff(x)','y=sin(x)-0.4*x')
-->XX=[-5*%pi:%pi:5*%pi;
-->X=fsolve(XX,ff)
X =
  -16.11948    -12.154854    -9.8362948    -5.8716685    -3.5531095
   0.4115168 2.7300758 6.6947022 9.0132611 12.977887 15.296446
```