ЛЕКЦІЯ 5: ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Теоретичні засади чисельного інтегрування та диференціювання. Дискретизація області інтегрування. Точність методів. Побудова квадратурних формул. Квадратурні формули Ньютона-Котеса. Формули прямокутників, трапецій, Сімпсона. Наближене обчислення кратних інтегралів

На практиці доволі рідкісними є випадки, коли вдається отримати аналітичний вираз результату інтегрування. Відразу зазначимо, що мається на увазі обчислення визначеного інтегралу на певному проміжку інтегрування. Для обчислення невизначеного інтегралу існує єдиний спосіб: тотожними перетвореннями чи замінами змінних звести його до відомих табличних результатів. Хоча, за відсутності належних навичок чи таблиць невизначених інтегралів можна спробувати скористатися відомим пакетом Wolfram Matematica (за наявності), який має дуже потужний інструментарій.

Теоретичні засади методів розв'язання чисельного інтегрування

1. *Постановка задачі*

Задача чисельного інтегрування полягає в наближеному обчисленні визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, якщо функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a,b]$. У випадку, якщо відома первісна $F(x)$ від функції $f(x)$, то достатньо скористатися формулою Ньютона-Котеса $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. У більшості випадків на практиці первісну визначити не вдається, або функція $f(x)$ задана таблично, як, наприклад, результати експерименту тощо. Тоді будують формули для наближеного обчислення визначених інтегралів., які ще називають *квадратурними формулами*. Переважно застосовують квадратурні формули, в яких використовуються значення підінтегральної функції в окремих точках проміжку інтегрування, тобто формули вигляду

$$S = \int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{5.1}$$

де A_k та x_k називають ваговими коефіцієнтами та вузлами квадратурної формули. Похибка квадратурної формули $R_n(f)=\int\limits_a^b f(x)dx-\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ є похибкою методу і разом з абсолютною похибкою $\triangle_f$ обчислень наближених значень $f(x_k)$ становить неусувну похибку $R_f=\triangle_f \sum\limits_{k=1}^{n}|A_k|$.

Залежно від способів обчислення коефіцієнтів A_k і вибору координат (*вузлів*) x_k на проміжку інтегрування, можна отримати різні квадратурні формули, які відрізняються між собою за рівнем складності програмної реалізації і точністю обчислень. Ідею числового інтегрування можна спрощено представити як розбиття S на n тонких «смужок» – криволінійних трапецій S_k, площу яких визначити легше (рис.5.1)

$$S=\sum_{k=1}^{n} S_k \tag{5.2}$$

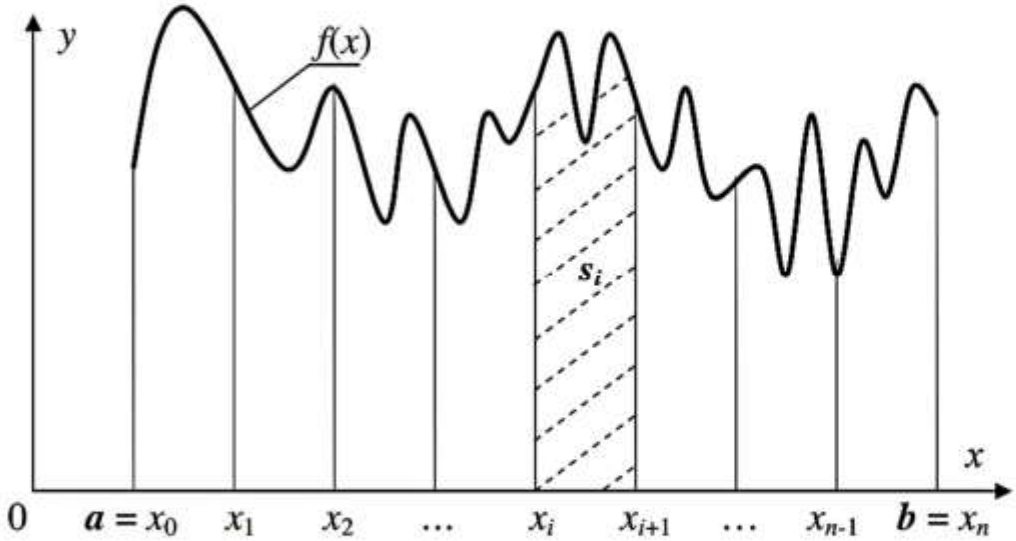

Рис. 5.1. Графічна інтерпретація числового інтегрування

Одними з найпростіших є доволі ефективні методи розв'язання задачі чисельного інтегрування функцій: метод лівих та правих прямокутників та метод трапецій. У методі лівих прямокутників приймають (див. рис. 5.2)

$$S_k=(x_k-x_{k-1})\,f(x_{k-1}) \quad (k=\overline{1,n}) \tag{5.3}$$

і, якщо розбиття проміжку інтегрування рівномірне, тобто $x_k - x_{k-1} = h = \dfrac{b-a}{n} \quad (k = \overline{1,n})$, $x_0 = a,\ x_n = b$, то (5.2) отримує вигляд

$$S = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,. \tag{5.4}$$

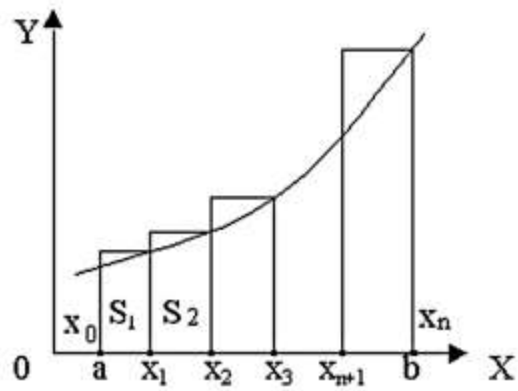

Рис. 5.2. Графічна інтерпретація методу лівих прямокутників

Метод правих прямокутників (див. рис. 5.3) відрізняється лише вибором S_k

$$S_k = (x_k - x_{k-1})\, f(x_k) \quad (k = \overline{1,n}) \tag{5.5}$$

і, відповідно

$$S = h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,. \tag{5.6}$$

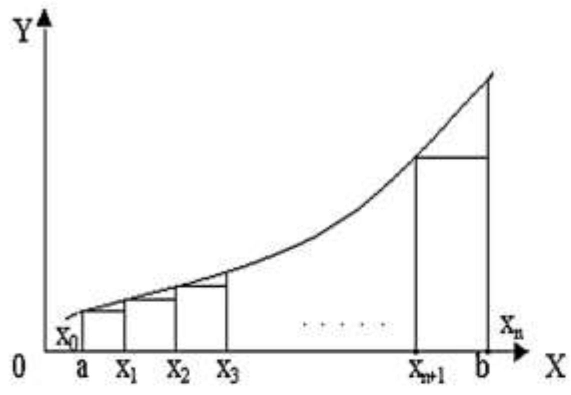

Рис. 5.3. Графічна інтерпретація методу правих прямокутників

Метод трапецій заснований на кусково-лінійній інтерполяції функції $f(x)$, побудованій по точках $M_k = \left(x_k, f(x_k)\right), k = \overline{0,n}$ (див. рис. 5.4), і може бути отриманий як середнє від (5.5) та (5.6)

$$S = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right). \tag{5.7}$$

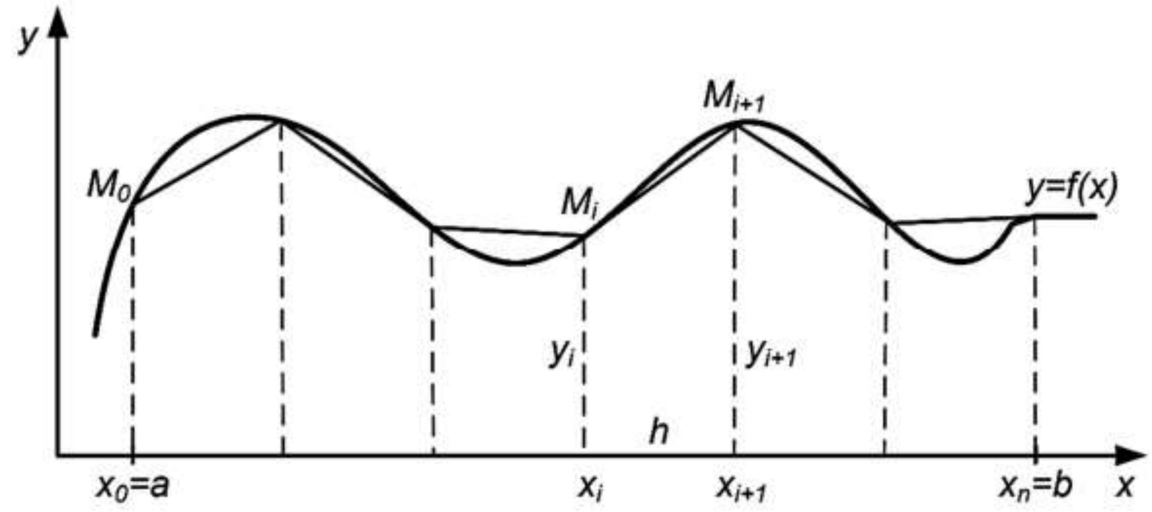

Рис. 5.4. Графічна інтерпретація методу трапецій

Згадані методи (5.5)-(5.7) є легкими для програмування і їх похибка може бути оцінена за формулою $R_n(f) = \frac{h^2(b-a)}{12} Q_2$, де $Q_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|$. Щоб похибка не перевищувала задане значення ε, крок розбиття проміжку інтегрування слід обирати з умови $h \le \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)Q_2}}$.

Більш складні квадратурні формули отримують за допомогою апарату інтерполювання. Методи чисельного обчислення інтеграла засновані на тому, що в якості наближеного значення інтеграла (5.1) береться значення інтеграла від інтерполюючої для $f(x)$ функції, побудованої по точках $x_k, k = \overline{0,n}$ розбиття відрізка $[a,b]$. Наприклад, формула Сімпсона побудована на кусково-квадратичній інтерполяції функції $f(x)$, побудованій по точках $M_k = \left(x_k, f(x_k)\right), k = \overline{0,n}$, причому n обв'язково має бути парним (див. рис. 5.5).

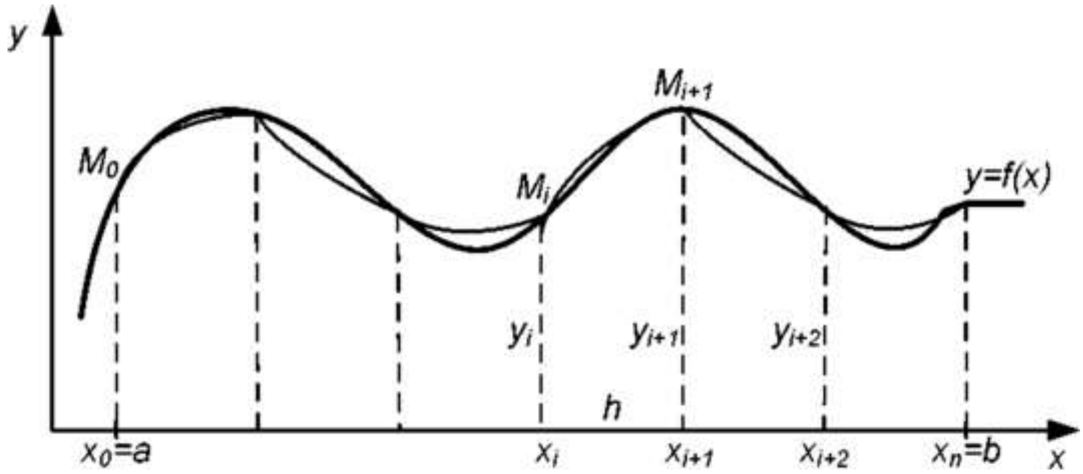

Рис. 5.5. Графічна інтерпретація методу Сімпсона

Оскільки на кожній парі проміжків $[x_k,\, x_{k+2}]$ функція *f(x)* інтерполюється параболою (тобто функцією виду $A_k x^2 + B_k x + C_k$, яка проходить через три точки $M_k\ (k, k+1, k+2)$), то поставлена задача інтерполяції розв'язується, якщо ця парабола є многочленом Лагранжа другого степеня (на прикладі точок M_0, M_1, M_2):

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 \quad (5.8)$$

Для однакових інтервалів інтерполяції цей многочлен можна записати у вигляді

$$L(x) = \frac{1}{2h^2}\left[(x-x_1)(x-x_2) f_0 - 2(x-x_0)(x-x_2) f_1 + (x-x_0)(x-x_1) f_2\right] \quad (5.9)$$

де $h = x_k - x_{k-1}$.

Враховуючи припущення, що $L(x) \cong f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_2]$, буде справедливою наближена рівність

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_2} L(x)dx = \frac{1}{2h^2}\left[f_0 \int_0^{2h} (\xi-h)(\xi-2h)d\xi - \right.$$
$$\left. -2 f_1 \int_0^{2h} \xi(\xi-2h)d\xi + f_2 \int_0^{2h} \xi(\xi-h)d\xi \right] = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (5.10)$$

оскільки $x_2 = x_0 + 2h$ і $x_1 = x_0 + h$. Аналогічно можна записати наближені рівності для інших проміжків

$$\int_{x_{k-2}}^{x_k} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f_{k-2} + 4 f_{k-1} + f_k \right).$$

Підсумовуючи ці наближені рівності отримуємо

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) \right] \qquad (5.11)$$

Формула (5.11) називається *узагальненою формулою Сімпсона*. Точне значення інтеграла при використанні формули Сімпсона отримується, якщо підінтегральна функція $f(x)$ є многочленом не вище третього степеня. У всіх інших випадках існуватиме деяка похибка, величина якої залежатиме від аналітичного вигляду функції $f(x)$, а також від довжини і кількості інтервалів інтерполяції h. Похибку методу обчислення інтегралу за формулою Сімпсона можна представити у вигляді $\left|R_n(f)\right| \le \frac{h^4(b-a)}{180} Q_4$, де $Q_4 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left| f^{(4)}(x)\right|$

Очевидно, що під час заміни підінтегральної функції поліномом інших степенів можна отримати інші формули числового інтегрування. Узагальнючи, зазначимо, що формули (5.4), (5.6), (5.7), (5.11) наближеного числового інтегрування (5.1) , є частковими випадками так званихі формул Ньютона-Котеса. Спільною рисою всіх формул Ньютона-Котеса є заміна підінтегральної функції інтерполяційним многочленом Лагранжа з вузлами, що розбивають проміжок інтегрування на рівні частини.

Точність таких формул зростає зі збільшенням степеня полінома, але самі формули надто ускладнюються, що обмежує доцільність їх практичного використання. Тому за необхідності обчислення означеного інтеграла з підвищеною точністю краще розбити проміжок інтегрування на більшу кількість окремих ділянок і застосовувати більш прості формули нижчих порядків.

Раціональним шляхом підвищення точності інтегрування вважається також вибір оптимального розміщення вузлів інтерполяції. Саме таким шляхом вдається отримати точні квадратурні формули для алгебричних многочленів степеня $2n-1$, де n - кількість вузлів інтерполяції.

Побудова квадратурної формули, яка була би точною для довільного алгебричного многочлена степеня m ґрунтується на тому, що ця формула повинна бути точною для сукупності функцій $f(x) = x^r$, $r = \overline{0,m}$, що можливо лише за виконання умов

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^r = \int_a^b x^r dx. \qquad (5.12)$$

Умови (5.12) є системою $m+1$ рівнянь з $2n$ невідомими $c_1, c_2, \ldots, c_n$ і $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Кількість рівнянь і кількість невідомих будуть однаковими лише при $m = 2n - 1$.

Щоб отримати квадратурну формулу, яка була би зручною для будь-якого проміжку інтегрування, застосовують заміну змінної

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t.$$

Внаслідок цього задача інтегрування деякої функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ завжди зведеться до інтегрування деякої іншої функції $f(t)$ на проміжку $[-1,1]$, а система (5.12) матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} a_k t_k^r = \int_{-1}^{1} t^r dt, \quad r = \overline{0, m}. \tag{5.13}$$

Розв’язок цієї системи залежить від кількості вузлів інтерполяції n. Зокрема, при $n = 2$ і відповідному йому значенні $m = 2n - 1 = 3$ одержується система

$$a_1 + a_2 = 2,$$

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 = 0,$$

$$a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 = 2/3,$$

$$a_1 t_1^3 + a_2 t_2^3 = 0.$$

Підставивши її розв’язок

$$a_1 = a_2 = 1, \quad t_1 = -0{,}5773502, \quad t_2 = 0{,}5773502$$

у вираз (5.13), для даного випадку отримаємо квадратурну формулу у вигляді

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = f(-0{,}5773502) + f(0{,}5773502), \tag{5.14}$$

яка буде точною для будь-якого алгебричного многочлена третього степеня.

Для кількості вузлів інтерполяції $n=3$ аналогічно можна отримати формулу

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{5}{9} f(-0{,}77459667) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(0{,}77459667). \qquad (5.15)$$

Формули виду (5.14), (5.15) називаються формулами найвищого алгебричного степеня точності або *формулами Ґаусса*. Для многочленів вищих степенів значення a_i й t_i можна знайти в довідниках.

Зауважимо, що підвищена точність формул Ґаусса має сенс лише для підінтегральної функції у вигляді полінома. Для функцій іншого виду результат завжди буде наближеним.

За необхідності обчислення означених інтегралів з наперед заданою точністю, як правило, порівнюються результати інтегрування для зростаючого ряду значень $m = 2,4,8,16,\ldots$, вважаючи правильною кількість значущих перших цифр, які збігаються зі збільшенням значень m.

Підводячи підсумок можна зазначити, що для практики доцільними є методи числового інтегрування побудовані на нескладних квадратурних формулах з вибором вірного кроку розбиття h (для рівномірного розбиття рекомендується керуватися оцінкою $R_n(f) < \varepsilon / 2$) або формули Гауса, Ньютона-Котеса, коефіцієнти яких можна знайти у довідковій літературі.

Практичні засади методів чисельного інтегрування в пакеті матричних обчислень Scilab (Mathlab).

1. Інтегрування методом трапецій

У Scilab чисельна інтеграція по методу трапецій реалізована за допомогою функції

inttrap(x, y)

Ця функція обчислює площу фігури під графіком функції y(x), яка описана набором точок (x, y). Параметр x є необов'язковим. Для функції inttrap(y) елементи вектора x набувають значень номерів елементів вектора y.

Для прикладу, обчислимо визначений інтеграл $\int_{5}^{13} \sqrt{2x-1}dx$

Цей інтеграл легко зводиться до табличного $\int_{5}^{13} \sqrt{2x-1}dx = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}$, тому обчислити його можна по формулі Ньютона-Лейбніца: $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$ і жодних проблем для обчислення у будь-якій системі програмування, в тому числі у Scilab, не складає.

Тепер застосуємо для пошуку значення заданого інтегралу метод трапецій, зміст якого полягає в наступному: проміжок інтегрування розбивають на певну кількість рівних відрізків, кожну з отриманих криволінійних трапецій замінюють прямолінійною і обчислюють наближене значення інтеграла як суму площ цих трапецій.

Розглянемо розв'язування цієї задачі у кількох варіантах, зменшуючи крок розбиття проміжку інтегрування від 1 до 0.1.

```
-->a=5;b=13;
-->//Точний розв'язок
-->I=(2*b-1)^1.5/3-(2*a-1)^1.5/3
I =
32.666667
-->x=a:b; y=sqrt(2*x-1);            //Крок = 1
-->inttrap(x,y)
ans =
32.655571
-->h=0.5; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);   //Крок = 0.5
-->inttrap(x,y)
ans =
32.66389
-->h=0.1; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);   //Крок = 0.1
-->inttrap(x,y)
ans =
32.666556
```

Неважко помітити зростання точності із зменшенням кроку розбиття.

2.Інтегрування квадратурними формулами

Метод трапецій є окремим випадком квадратурних формул Ньютона-Котеса, які мають вигляд:

$$\int_a^b y(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

де $\mathbf{H_i}$ - деякі коефіцієнти, звані постійними Ньютона-Котеса.

Якщо прийняти n = 1, то отримаємо метод трапецій, при n = 2 - метод Сімпсона. Ці методи називають квадратурними методами нижчих порядків. Для n > 2 отримують квадратурні формули Ньютона-Котеса вищих порядків. Обчислювальний алгоритм квадратурних формул реалізований в Scilab функцією:

integrate(fun, x, a, b)

де **fun** - функція, що задає підінтегральний вираз в символьному виді;

x - змінна інтегрування, так само задається у вигляді символу;

a, b - межі інтегрування, дійсні числа.

З допомогою цієї функції завдання з попереднього прикладу розв'язується однією командою:

```
-->integrate('sqrt(2*x-1)','x',5,13)
```

```
ans  =
32.666667
```

3.Інтегрування зовнішньої функції

Найбільш універсальною командою інтегрування в Scilab є:

[I, err]=intg(a, b, name)

де **name** - ім'я функції, що задає підінтегральний вираз (тут функція може бути задана у вигляді набору дискретних точок (як таблиця) або за допомогою зовнішньої функції); **a** і **b** - межі інтегрування;

Попереднє завдання може бути вирішене таким чином:

```
-->deff('y=fun(x)','y=sqrt(2*x-1)'); intg(5,13,fun)
ans  =
32.666667
```

Практичні завдання

Обчислити інтеграл одним з відомих способів :

1. $\int_{0}^{5}(2x^2+3x+1)dx$

2. $\int_{-2}^{6}\sqrt{x^2+x-4}dx$

3. $\int_{1}^{4}\frac{\sqrt{x^2+x}}{2x}dx$

4. $\int_{-5}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2x^3}}dx$

5. $\int_{1}^{2}(x^2+1)dx$

6. $\int_{3}^{1}(2\sqrt{x}-3)dx$

7. $\int_{4}^{1}(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x)dx$

8. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

9. $\int_{9}^{4}\sqrt{x}dx$

10. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

11. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\int_{-4}^{7}\left(\frac{3x+5}{x^2+2x-3}\right)dx$

13. $\int_{-10}^{2}\left(e^{3x}+\frac{1}{x-3}\right)dx$

14. $\int_{-2}^{2}\cos 5x dx$

15. $\int_{4}^{10}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1\right)dx$