Тема: Розв’язок алгебраїчних рівнянь у MathCAD

Аналіз аналітичних та чисельних методів розв'язку алгебраїчних та трансцендентних рівнянь показує, що не існує єдиного алгоритму визначення коренів рівняння. Тільки їх сукупність дозволить знайти корені рівнянь і то не завжди.

Комп'ютерні технології розв'язку рівнянь вимагають чіткої постановки задачі. Недостатньо сформувати задачу так: необхідно визначити корені рівняння 2^x - 3.8- x +1 = 0. Таке формування задачі не коректне, оскільки не відомо, які корені нас цікавлять - дійсні чи комплексні, скільки коренів міститься в цьому рівнянні та, які з них необхідно знайти в якій області значень аргументів вони знаходяться, з якою точністю необхідно одержати розв'язок.

Правильною в даному випадку буде така постановка задачі: необхідно знайти дійсні корені рівняння 2^x- 3.8- x + 1 = 0, що знаходяться в області ізоляції $0{,}1 \le x_1 \le 1$ та $3 \le x_2 \le 5$. Розв'язок одержати з точністю не менше чотирьох значущих цифр після коми.

Комп'ютерні технології розв'язку алгебраїчних та транциндентних рівнянь представляють собою виконання таких дій:

1. Визначення області ізоляції кожного з дійсних коренів рівняння.
2. Вибір вбудованої функції розв'язку рівняння.
3. Розв'язок рівняння.
4. Перевірка правильності одержаного розв'язку.

Система MathCAD має декілька вбудованих функцій для пошуку розв'язку рівнянь та систем рівнянь. Серед них є наступні три функції:

- ✓ **root;**
- ✓ **find;**
- ✓ **polyroots.**

Розв'язок рівнянь за допомогою функції root

Функція root здійснює розв'язок алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, визначаючи дійсні корені рівняння.

Вона має вигляд: root(f(x),x),

де f(x) - рівняння, що розв'язується, тобто f(x)=0; x - аргумент функції f(x).

Ця функція подається в одній із таких форм запису:

$x := x0$	$x := x0$	$x := x0$
$root, f(x),x) =$	$z = root(f(x),x)$	$\varphi(x) := f(x)$
	$z =$	$z := root(\varphi(x), x)$
$z =$		

Наведемо приклади використання функції root.

Приклад 1. Необхідно визначити корені рівняння 2^x - 4 x = 0, якщо відомо, що рівняння має два корені та такі області ізоляції: $0 < x_1 < 1$, $3 < x_2 < 5$

Розв'язок зображений на рис. 1.

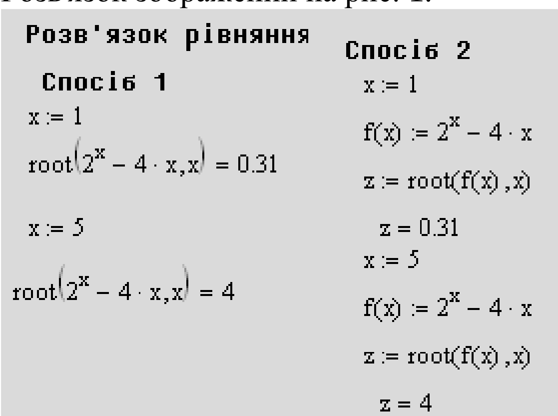

Рисунок 1 - Розв'язок рівняння за Допомогою функції

Функція root використовується для визначення тільки дійсних коренів, а для визначення комплексних коренів вона не застосовується.

Визначення коренів полінома

Визначення коренів полінома здійснюється за допомогою функції polyroots, яка має вигляд:

Polyroots(V), V - вектор коефіцієнтів полінома, починаючи з молодшого степеня.

Ця функція знаходить всі дійсні та комплексні корені. Технологія використання цієї функції така:

1. Введення вектора коефіцієнтів полінома за допомогою панелі ***Матриця***.
2. Введення функції polyroots;
3. Одержання результату шляхом натискання на клавішу дорівнює.

Якщо який-небудь член у поліномі відсутній, то на відповідній позиції вектора повинен стояти нуль.

Розглянемо технологію визначення коренів полінома на прикладах.

Приклад 2. Нехай необхідно знайти корені поліномів:

$$1)\ y = x^4 + 3\cdot x^3 - 7\cdot x + 3.5 = 0; \quad 2)\ x^5 - 1;$$

$$3)\ x^5 + 2\cdot i\cdot x^4 + (1 - 3\cdot i)\cdot x^2 - 1 = 0.$$

Розв'язок буде мати вигляд, зображений на рис. 2.

Розв'язок рівняння 1

$$V1 := \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{polyroots}(V1) = \begin{pmatrix} -2.257 - 1.089i \\ -2.257 + 1.089i \\ 0.629 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

$$i := \sqrt{-1}$$

Розв'язок рівняння 2

$$V2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{polyroots}(V2) = \begin{pmatrix} -0.809 - 0.588i \\ -0.809 + 0.588i \\ 0.309 - 0.951i \\ 0.309 + 0.951i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок рівняння 3

$$V3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - 3\cdot i \\ 0 \\ 2\cdot i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{polyroots}(V3) = \begin{pmatrix} -1.13 + 0.218i \\ -0.431 - 0.371i \\ 0.133 - 2.499i \\ 0.433 + 0.411i \\ 0.994 + 0.241i \end{pmatrix}$$

Рисунок 2 - Розв'язок рівнянь До прикладу 2

Визначення коренів рівняння за допомогою функції Find

Функція **Find** призначена для розв'язку систем рівнянь методом ітерацій. Як частковий випадок функція може розв'язувати систему з одного рівняння, тобто визначати його корені.

У цьому випадку блок розв'язку рівняння поєднує такі процедури:

завдання початкового наближення кореня з області його ізоляції;

- введення слова Given, яке вказує на те, що далі йде рівняння, корені якого необхідно визначити; введення рівняння, знак рівності необхідно набрати за допомогою комбінації клавіш «Ctrl»+«=»;
- введення функції Find(x), де x - шукана змінна;
- одержання відповіді шляхом натиснення на клавішу «=».

Технологію розв'язку розглянемо на прикладах:

Приклад 3. Необхідно розв'язати рівняння 3^x - 8 • x +1 , якщо відомо, що рівняння має два корені, область ізоляції яких має значення: $0 < x_1 < 1$, $2 < x_2 < 3$.

Розв'язок рівняння наведений на рис. 3

Розв'язок рівняння для x1

$x := 0.5$

Given

$3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$

$z := find(x)$

$z = 0.299$

Розв'язок рівняння для x2

$x := 3$

Given

$3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$

$z := Find(x)$

$z = 2.782$

Розв'язок рівняння для x1

$x := 0.5$

Given

$3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$

$find(x) = 0.299$

Розв'язок рівняння для x2

$x := 3$

Given

$3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$

$Find(x) = 2.782$

Рисунок 3 - Розв'язок рівняння за Допомогою функції Find

Розв'язок рівнянь у символьному вигляді

Технологія розв'язку рівнянь у символьному вигляді складається з таких операцій:

1. Введення рівняння *f (x)* = 0, при цьому = 0 можна опустити.
2. Виділення шуканої невідомої подвійним клацанням мишки.
3. Звертання до пункту головного меню ***Символика→Переменньїе→Разрешить.***
4. Одержання відповіді.

Розглянемо приклади.

Приклад 4. Необхідно розв'язати символьні рівняння. $x^3 - a = 0$, $e^{-2*x}-2*a=0$, $\sin(a \cdot x) + \cos(a \cdot x) = 0$

Розв'язок рівнянь, зображений на рис. 4.

Розв'язок рівняння:

Приклад 1:

$x^3 - a = 0$

$$\begin{bmatrix} a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \\ \frac{-1}{2} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \\ \frac{-1}{2} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \end{bmatrix}$$

Приклад 2:

$e^{-2 \cdot x} - 2 \cdot a = 0$

$\frac{-1}{2} \cdot \ln(2 \cdot a)$

Приклад 3:

$\sin(a \cdot x) + \cos(a \cdot x) = 0$

$\frac{-1}{4} \cdot \frac{\pi}{a}$

Рисунок 4 - Розв'язок символьних рівнянь Для прикладу 4.

При розв'язку рівнянь аналітичним методом MathCAD видає не повну інформацію про всі корені рівняння, так як і в прикладах 2 та 3 з рис. 10.

Отже необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Перевірка правильності одержаних результатів здійснюється таким чином:

1. Підстановка кореня в рівняння та обчислення значень рівняння, які повинні дорівнювати нулю при всіх значеннях кореня.
2. Обчислення коренів декількома методами.

Розв'язування системи лінійних рівнянь

Графічний метод - будується графік відповідної функції і визначається кількість коренів і їх найближчі значення.

У системі MathCad системи рівнянь розв'язуються за до- помогою функцій:

lsolve;
Find;
Minerr.
root

Функція lsolve дозволяє розв’язувати системи алгебраїч- них рівнянь матричним методом.

Функція Find дозволяє розв’язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій.

Функція Minerr так самояк і функція Find розв’язує лiній- нi та нелiнiйнi алгебраїчнi рівняння. Відмінність полягає в тому, що функція може вида ти розв’язок, не досягнувши потрібної точності ітерацій. Це дозволяє одержати наближений розв’язок у випадку, коли функція Find не видає розв’язок. Але слід пам’ятати, що при використанні функції Minerr необхідно пере- віряти правильність одержаних результатів.

Функції lsolve та Find дозволяють одержати розв’язок сим- вольним методом.

Функція lsolve

Функція lsolve має вигляд: *IsolveM,V)*, де *M* - матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь; *V* - вектор правих частин системи рівнянь.

Технологія розв'язку системи рівнянь така:

- ✓ позначення матриці коефіцієнтів системи лінійних рівнянь;
- ✓ утворення вектора правих частин системи рівнянь;
- ✓ введення функції lsolve;
- ✓ одержання розв'язку шляхом натиснення на клавішу дорівнює.

Розв'язок матричним методом можна одержати, не використовуючи функцію lsolve. Для цього досить ввести вираз M^{1} -V.

Розв'язок системи рівнянь завдяки функції lsolve та за допомогою матричного представлення можна одержати, використовуючи символьні обчислення. Для цього служить знак «^», що утворюється натисканням комбінації клавіш «Ctrl»+«.». Розв'язок одержуємо при натисканні клавіші Enter.

Технологію метода розглянемо на прикладах.

Приклад 5. Нехай необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\cdot x-3\cdot y+z=1.5, \\ -x+1.5\cdot y+3\cdot z=-3, \\ 7\cdot x+5\cdot y-1.6\cdot z=7. \end{cases}$$

Розв'язок рівняння зображений на рис. 5.

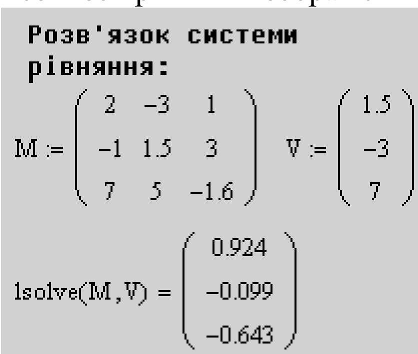

Рисунок 5 - Розв’язок системи рівнянь за Допомогою функції lsolve для прикладу 5

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x+y+a\cdot z=1, \\ b\cdot x+y+3\cdot z=2, \\ c\cdot x+5\cdot y+z=3. \end{cases}$$

Розв'язок наведений на рис. 6.

Розв'язок системи рівняння:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ b & 1 & 3 \\ c & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(M,V) \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \cdot \dfrac{(-1+a)}{(-14-b+3\cdot c+5\cdot b\cdot a-c\cdot a)} \\ \dfrac{(-b+3\cdot b\cdot a-7-2\cdot c\cdot a+3\cdot c)}{(-14-b+3\cdot c+5\cdot b\cdot a-c\cdot a)} \\ \dfrac{(-7+2\cdot b+c)}{(-14-b+3\cdot c+5\cdot b\cdot a-c\cdot a)} \end{bmatrix}$$

Рисунок 6 - Розв'язок системи рівнянь Для прикладу 6

Функція Find

Функція Find дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій.

Вона має вигляд: *Find(x, y, z,....)* , де *x, y, z* - шукані невідомі.

Технологія розв'язку систем рівнянь є такою:

¥ завдання початкових наближень для всіх невідомих: *x := x0, y := y*0, *z := z*0,

¥ введення слова Given, яке вказує на те, що далі буде система рівнянь;

¥ введення системи рівнянь;

¥ введення функції *Find(x, y, z,....)* ;

¥ одержання результату.

.Технологію методу розглянемо на прикладах.

Приклад 7 Необхідно розв'язати систему з прикладу 1 якщо початкові наближення наступні: $x_0 = 1$, $Y_o = 0$, $z_o = -0.5$.

Розв'язок наведений на рис. 7

Розв'язок системи рівняння:

$x := 1 \qquad y := 0 \qquad z := -0.5$

Given

$2\cdot x - 3\cdot y + z = 1.5$

$-x + 1.5\cdot y + 3\cdot z = -3$

$7\cdot x + 5\cdot y - 1.6\cdot z = 7$

$$\mathrm{Find}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0.924 \\ -0.099 \\ -0.643 \end{pmatrix}$$

Рисунок 7 - Розв'язок Для прикладу 7

Приклад 8. Розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z = -19, \\ x^2 + y^2 + 2\cdot z^2 = 63, \\ \dfrac{x}{2\cdot y} + \dfrac{y}{2\cdot x} = \dfrac{13}{12}. \end{cases}$$

Відомо, що початковими наближеннями можуть бути: $X_0=-2$,.$Y_0=-1.5$, $Z_0=3$.

Розв'язок наведений на рис. 8.

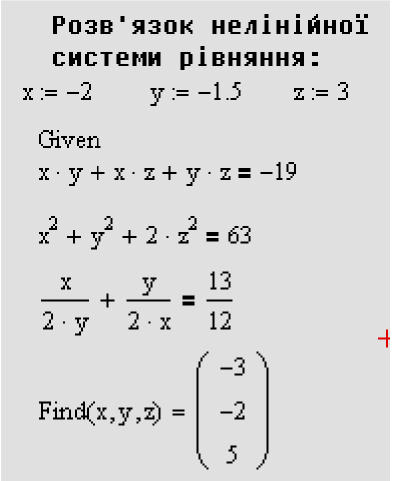

Рисунок 8 - Розв’язок Для прикладу 8

Функція Minerr

Функція Minerr має таку саму технологію застосування для розв'язку, як і функція Find і має таку форму запису: *Minerrx,y,z,....*), де *x, y, z* - шукані невідомі.

Технологію застосування цієї функції розглянемо на прикладі.

Приклад 9 Для рівняння з прикладу 4 знайти розв'язок з використанням функції Minerr. Розв'язок проілюстрований на рис. 9.

Рисунок 9 - Розв’язок Для прикладу 9

Функція *root* . Для чисельного рішення одного рівняння з одним невідомим використовується функція *root (f (x), x)* . Аргументи цієї функції: f (x) - вираз, для якого проводиться пошук коренів, x - аргумент (незалежна змінна) функції.

Для пошуку коренів за допомогою функції *root* необхідно присвоїти початкове значення аргументу функції. Результатом роботи функції *root* є повернення значення змінної, при якому вираз звертається в нуль.

Приклад 10. Найті корінь рівняння $x^3 - e^x = 0$.

Рішення:

x: = 3 - початкове значення змінної;

y: = root ($x^3 - e^x$, x);

y = 1.857 - корінь рівняння.

<u>Панель Matrix (Матричні).</u>

До операторів панелі Matrix (Матричні) відносяться:

Matrix or Vector (Матриця або вектор) – Додає матрицю або вектор.

Subscript (Індекс) – Використовується для задання індексу певного елемента матриці.

Inverse (Обернений). Оператор знаходження оберненої матриці.

Determinant (Визначник). Для знаходження визначника матриці або модуля вектора.

Vectorize (Векторизація). Пропонує у визначеному виразі робити операції поелементно.

Matrix Column (Стовпець матриці). Використовується для виділення стовпця матриці.

Matrix Transpose (Матричне транспонування). Використовується для виділення рядка або транспонування матриці.

Range Variable (Ранжовані змінні) Використовується як аналог програмних операторів циклу.

Dot Product (Множення). Використовується для множення матриць.

Cross Product (Векторний добуток). Використовується для знаходження добутку векторів.

Vector Sum (Сума). Підсумовує елементи вектора. Повертає скаляр.

Picture (Зображення). Дозволяє вставку зображень в документ.

Найбільш простим способом задання матриці є використання спеціальної панелі Insert Matrix (Вставити матрицю) робочої панелі Matrix (Матричні). Параметри матриці задаємо у віконечках Rows (рядки) і Columns (колонки). Тобто, якщо потрібно ввести матрицю, розмірністю 2×2, то ставимо 2 там, де рядки, і 2 там де стовпчики. ((Відкрили і подивилися)). Якщо потрібно задати вектор, то у віконечку Columns (колонки) ставимо 1. Елементи матриці можна представляти у вигляді літер, цифр та виразів. На практиці зазвичай оперують не матрицями, а їх іменами. Для цього треба присвоїти значення матриці певній змінній. Для цього спочатку вводимо змінну, потім оператор присвоєння, потім вводимо саму матрицю. Якщо серед символів та виразів, які є елементами матриці є невідомі або параметри, то слід обов'язково обумовити їх перед заданням матриці. Якщо елементами матриці є текст, то його потрібно взяти в лапки.

В заданій матриці завжди можна отримати значення будь-якого її елемента, використовуючи матричні індекси ($a_{1,2}$- другий елемент першого рядка). В нашій математиці відлік рядків і стовпців прийнято починати з 1. Але слід пам'ятати, що в програмуванні початкові індекси дорівнюють 0. Щоб змінити початковий індекс: Tools→ Worksheets Options→ Built-in Variables→ ORIGIN (1). Можна зробити інакше. На початку обрахувань в документі присвоїти ORIGIN:=1.

Для того, щоб отримати значення певного визначеного матричного елемента потрібно ввести ім'я матриці із відповідним індексом. Для цього використовуємо оператор Subscript (Індекс) панелі Matrix. На першому місці індексу ставимо номер рядка, на другому – стовпця через кому. При визначенні елемента вектора вказуємо тільки номер рядка.

Транспонування матриць.

Оператор транспонування Matrix Transpose знаходиться на панелі Matrix. Також його можна ввести з меню або панелі Symbolic. Транспонування виконується згідно правил лінійної алгебри. Виконується для матриць як із числовими так і з символьними елементами.

Визначник матриці.

Оператор знаходження визначника матриці Determinant (Визначник) знаходиться також на панелі Matrix. Його вигляд відповідає прийнятому в математиці. Обчислювати визначник можна чисельно і символьно.

Обернена матриця.

Знаходження оберненої матриці – одна з основних задач матричної алгебри, оскільки вона постійно використовується у розв'язаннях та доведеннях. Оператор знаходження оберненої матриці Inverse (Обернений) знаходиться на панелі Matrix. Для матриць з елементами-символами задіюємо оператор визначення оберненої матриці, що знаходиться на панелі Symbolic.

Технологія створення вектора та матриць

Технологія створення векторів та матриць в MathCAD складається з виконання таких дій:

1. Введення імені вектора чи матриці та знака присвоєння.
2. Встановлення розмірів вектора чи матриці.
3. Введення елементів вектора чи матриці в пусті маркери. Встановлення розмірів вектора чи матриці можна за допомогою комбінації клавіш Ctrl+M чи на панелі ***Матрицы и векторы*** вибрати команду ***Матрица или Вектор*** та викликати вікно вставка матриці (рис. 11).

У полі Rows задається необхідна кількість стовпців матриці чи вектора, а в полі Columns - необхідна кількість рядків.

Після заповнення необхідно натиснути клавішу ***Ок***.

Рисунок 11 - Введення розмірів матриці чи вектора

Елементами векторів та матриць можуть бути:

> дійсні та комплексні числа;

> функції з числовими значеннями аргументів;

> сукупність чисел, функцій, арифметичних операторів та їх обчислення.

Операції над матрицями

Над матрицями в MathCAD можна виконувати такі дії:

a) додавання до елементів матриці числа: $M + z$;
b) віднімання від елементів матриці числа: $M - z$;
c) множення елементів матриці на число: $M * z$;
d) ділення елементів матриці на число: M / z ;
e) додавання матриць: $M1 + M2$;
f) віднімання матриць: $M1 - M2$;
g) множення матриць: $M1 * M2$;
h) множення елементів матриць: $\overrightarrow{M1 * M2}$;
i) піднесення матриці до степеня: $M\mathbf{1}^n$.

MathCAD має велику кількість вбудованих функцій та операторів, що дозволяють обчислювати характеристики функцій, виконувати різноманітні її перетворення, утворювати нові матриці, повертати елементи, рядки та стовпці матриць.

Проілюструємо операції над матрицями на прикладі.

Приклад 12. Здійснити операції над матрицями M1 та M2. Операції над матрицями проілюстровані на рис. 12.

Робота з матрицями.

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M1 + 3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad M1 - 3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M1 \cdot 3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 3 & 6 \\ 12 & 15 & 9 \end{pmatrix} \quad \frac{M1}{3} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.667 & 1.667 \\ 1 & 0.333 & 0.667 \\ 1.333 & 1.667 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad M1 - M2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M1 \cdot M2 = \begin{pmatrix} 28 & 30 & 23 \\ 17 & 20 & 20 \\ 35 & 32 & 35 \end{pmatrix} \quad M1^2 = \begin{pmatrix} 27 & 29 & 24 \\ 14 & 17 & 23 \\ 31 & 28 & 39 \end{pmatrix}$$

Рисунок 12. - Операції над матрицями

Матричні оператори:

1. Зворотна матриця: M^{-1}.
2. Обчислення визначника: $|M|$.
3. Транспонування матриці: M^T.
4. Векторизація матриці: $\vec{M}$.
5. Виділення n-го стовпця матриці: $M^{\langle n \rangle}$.
6. Виділення елемента матриці: $M_{m,n}$.
7. Виділення комплесно-спряженої матриці: $\overline{M}$.

Проілюструємо операції над матрицями на прикладі.

Приклад 13. *Здійснити матричні операції над матрицями Мі та M_2. Матричні операції проілюстровані на рис. 13.*

Робота з матрицями.

$$i := \sqrt{-1}$$

$$M1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} 2+3\cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4\cdot i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333 & -0.133 & 0.067 \\ -0.667 & -0.533 & 1.267 \\ 0.333 & 0.467 & -0.733 \end{pmatrix} \qquad |M1| = -15 \qquad M1^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M1^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad M2^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-4i \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M1_{(1,1)} = 4$$

Рисунок 13 - Матричні операції

Функції повернення характеристик матриці:

1. Повернення числа стовпців матриці: *cols*(*M*) .
2. Повернення числа рядків матриці: *rows*(*M*) .
3. Повернення рангу матриці: *rank*(*M*).
4. Повернення суми діагональних елементів матриці: *tr*(*M*).
5. Повернення середнього значення масиву елементів: *mean*(*M*) .
6. Повернення медіани масиву елементів: *median*(*M*) . Проілюструємо функції повернення характеристик матриці на прикладі.

Приклад 14. Обчислити функції повернення характеристик матриці М. Функції повернення характеристик матриці проілюстровані на рис. 14.

Функції повернення характеристик матриці:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cols}(M) = 4 \quad \mathrm{rows}(M) = 4 \quad \mathrm{rank}(M) = 2$$

$$\mathrm{mean}(M) = 4 \quad \mathrm{median}(M) = 4 \quad \mathrm{tr}(M) = 12$$

Рисунок 14 - Функції повернення характеристик матриці

Матричні функції:

1. Об'єднання двох матриць з однаковим числом рядків в одну: *augment*(*M*1, *M* 2) .
2. Об'єднання двох матриць з однаковим числом стовпців в одну: *stack(M*1, *M*2) .
3. Створення одиничної квадратної матриці (*nxn*): *identity*(*n*) .

4. Повернення матриці дійсних чисел: $\mathrm{Re}(M)$.
5. Повернення матриці уявних чисел: $\mathrm{Im}(M)$.

Розглянемо деякі приклади:

Приклад 15. Обчислити матричні функції. Матричні функції проілюстровані на рис. 15.

Матричні функції:

$$M1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M3 := \begin{pmatrix} 2+3\cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4\cdot i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{stack}(M1,M2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathrm{augment}(M1,M2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathrm{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}(M3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Im}(M3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 15 - Приклад використання матричних функції

4.1 Операції над векторами

Введення вектора відбувається так само, як і введення матриці.

Розглянемо операції над векторами:

1. Транспонування вектора: V^T .
2. Сортування вектора: *sort*(V) .
3. Зворотне сортування вектора: *reverse*(V) .
4. Векторизація: V .
5. Норма вектора: $|V|$.
6. Визначення числа елементів вектора: *length*(V) .
7. Виділення n-го елемента: V_n.
8. Повернення номера останнього елемента вектора: *last*(V) .
9. Повернення елемента вектора, максимального за значенням: $\max(V)$.
10. Повернення елемента вектора, мінімального за значенням: $\min(V)$.
11. Повернення дійсної частини елемента вектора: $\mathrm{Re}(V)$.

Повернення уявної частини елемента вектора: $\mathrm{Im}(V)$.