Міністерство освіти і науки України

Українська академія друкарства

Кафедра прикладної математики і фізики

Коляда Р. В., Мельник О. М.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Ч. 1. АЛГЕБРА МАТРИЦЬ

Методичні вказівки для студентів спеціальностей
“Автоматизоване управління технологічними процесами” ,
”Комп’ютерно-інтегровані технологічні процеси і
виробництва”, ”Комп’ютерні науки”

Львів − 2019

Коляда Р. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1. Алгебра матриць: методичні вказівки для студентів спеціальностей “Автоматизоване управління технологічними процесами”, ”Комп’ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва”, ”Комп’ютерні науки” / Р. В. Коляда, О. М. Мельник – Львів, Укр. акад. друкарства, 2019. – 51 с.

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і фізики Української академії друкарства (*протокол № 1 від 30 серпня 2019 р.*)

Відповідальний за випуск:
Піскозуб Й. З., канд. фіз.-мат. наук, доцент

1. Алгебра матриць

Вступ

Математика – одна з найдавніших наук, що зародилася на світанку цивілізації. Вона постійно збагачувалася як засіб пізнання закономірностей навколишнього світу. Розширюючи і зміцнюючи свої багатогранні зв'язки з практикою, математика допомагає людству відкривати і використовувати закони природи і є у наш час могутнім рушієм науки і техніки.

При вивченні вищої математики основна увага приділяється не лише засвоєнню математичних знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач, оволодінню математичними методами, моделями, що забезпечить успішне вивчення спеціальних дисциплін.

Студент ВНЗ дізнається, що існують різні розділи математики: лінійна алгебра, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння.

При вивченні математики формуються наступні компетенції:

− *соціально-особистісні* – розуміння та сприйняття етичних норм поведінки відносно інших людей, здатність навчатися, здатність до критики й самокритики, креативність, здатність до системного мислення, наполегливість у досягненні мети, турбота про якість виконаної роботи;

− *загально-наукові* – розуміння причинно-наслідкових зв'язків, володіння базовим математичним апаратом, базові знання сучасних інформаційних технологій, базові знання фундаментальних наук в обсязі, необхідному для засвоєння загальнопрофесійних дисциплін;

− *інструментальні* – навички роботи з комп'ютером, дослідницькі навички тощо.

Математичні компетентності складають основу для формування ключових компетентностей. До математичних компетентностей рівня стандарту відносяться:

− *практична компетентність* – уміння розв'язувати типові математичні задачі:

- використовувати на практиці алгоритм розв'язання типових задач;

- уміти систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміти розпізнавати типову задачу;

- уміти використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв’язувань типових задач (підручник, довідник, Інтернет-ресурси).

– *логічна компетентність* – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень:

- володіти і використовувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій (поняття, визначення понять; висловлювання, аксіоми, теореми, їх доведення, приклади);

- відтворювати дедуктивні доведення теореми та доведення правильності процедур розв’язань типових задач;

- проводити дедуктивні обґрунтування правильності розв’язання задач та шукати логічні помилки у невірних дедуктивних міркуваннях;

- використовувати математичну та логічну символіку на практиці.

Кейси самостійної роботи студентів включають завдання трьох рівнів математичної компетентності:

Рівень І (рівень відтворення) – це пряме застосування стандартних прийомів, розпізнавання математичних об’єктів і властивостей, виконання стандартних процедур, застосування відомих алгоритмів і технічних навичок, робота зі стандартними виразами і формулами, безпосереднє виконання обчислень.

Рівень ІІ (рівень встановлення зв’язків) будується на репродуктивній діяльності з розв’язування задач, які, хоча і не є типовими, але все ж знайомі або виходять за рамки відомого лише в незначній мірі. Зміст завдання підказує, матеріал якого розділу математики треба використовувати і які відомі методи застосувати. У цих завданнях висуваються вимоги до інтерпретації розв’язку, вони передбачають встановлення зв’язків між різними ситуаціями, що описані в задачі.

Рівень ІІІ (*рівень міркувань*) будується як розвиток попереднього рівня. Для розв’язування задач цього рівня потрібні певна інтуїція, роздуми і творчість у виборі математичного інструментарію, інтегрування знань з різних розділів курсу математики, самостійна розробка алгоритму дій.

1.1. Визначники

Означення. Вираз $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається *визначником (детермінантом) другого порядку*. Поняття "визначник" (від латинського determino – визначаю) ввів німецький математик Вільгельм Лейбніц (1646-1716 р.р.)

Елементи a_{11}, a_{22} утворюють головну діагональ визначника, а a_{12}, a_{21} – побічну діагональ. Для того, щоб обчислити визначник другого порядку потрібно від добутку елементів, що містяться на головній діагоналі відняти добуток елементів, що розміщені на побічній діагоналі.

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути не тільки числа, але й алгебраїчні вирази, функції чи інші об'єкти.

Приклад. Обчислити визначники другого порядку

а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 30 = -18,$

б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Означення. Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку*. Елементи визначника позначаються символами a_{ij}, де i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких міститься елемент a_{ij}. Наприклад, елемент a_{21} розміщений на перетині другого рядка і першого стовпця.

Визначники третього порядку обчислюються за *правилом трикутника*:

$$\Delta = \Delta_{+} - \Delta_{-},$$

де

$$\Delta_{+} = \begin{vmatrix} a_{11} & \circ & \circ \\ \circ & a_{22} & \circ \\ \circ & \circ & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & a_{13} \\ a_{21} & \circ & \circ \\ \circ & a_{32} & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & a_{12} & \circ \\ \circ & \circ & a_{23} \\ a_{31} & \circ & \circ \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{-} = \begin{vmatrix} \circ & \circ & a_{13} \\ \circ & a_{22} & \circ \\ a_{31} & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & a_{12} & \circ \\ a_{21} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & a_{23} \\ \circ & a_{32} & \circ \end{vmatrix}.$$

Приклад. Методом трикутника обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times5\times2+3\times1\times(-2)+4\times3\times2-2\times5\times(-2)-1\times1\times3-3\times4\times2=21.$$

Інший метод обчислення визначників третього порядку – *метод Саррюса*. До визначника третього порядку дописують перших два стовпці і обчислення виконується за схемою

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад. Обчислити визначник за допомогою методу Саррюса

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 - 6 + 24 + 20 - 3 - 24 = 21.$$

Розглянемо властивості визначників на прикладі визначників третього порядку.

1. Визначник не зміниться якщо всі його рядки замінити відповідно стовпцями з тими ж номерами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доведення.

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Звідси $\Delta_1=\Delta_2$.

Властивість 1 встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі для рядків і для стовпців.

2. Якщо переставити місцями два довільні рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника нульовий, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо визначник має два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

5. Спільний множник, що міститься у всіх елементах довільного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Якщо кожен елемент i-го рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких i-ий рядок (стовпець) складається з перших доданків, в другому – з других доданків. Решта елементів залишаються однаковими. Наприклад

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів довільного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число, наприклад

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Означення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який утворений з даного визначника викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор M_{ij} , взятий з знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Приклад. Обчислити алгебраїчні доповнення елементів визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -2$,

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 11$,

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

Твердження (властивість 9). Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Доведення. Для визначника третього порядку справедливі 6 наступних рівностей:

1) $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$;

2) $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$;

3) $\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$;

4) $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$;

5) $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$;

6) $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$.

Доведемо одну з них, наприклад 1):

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$a_{11}(a_{23}a_{31} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Запис визначника за будь-якою з шести попередніх формул називається *розкладом визначника* за елементами відповідного рядка (стовпця).

Приклад. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами 2-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 0 + 4(-4) - 3(-8) = -16 + 24 = 8.$

Твердження (властивість 10). Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Доведення. Перевіримо для визначника Δ суму добутків елементів першого рядка і алгебраїчних доповнень елементів 3-го рядка:

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{12}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$
$$= a_{11}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22} - a_{13}a_{12}a_{21} = 0.$$

Поняття про визначники вищих порядків

Означення. *Визначником n-го порядку* називається вираз, що дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Визначник n-го порядку має вигляд $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Визначники вищих порядків обчислюють за допомогою розкладу їх за елементами рядка (стовпця), попередньо спростивши його за допомогою властивостей визначників до вигляду, у якому була б максимальна кількість нулів. Інший метод обчислення визначників вищих порядків – метод зведення визначника за допомогою елементарних перетворень до трикутного виду. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.

Приклад. Обчислити визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Спростимо його, виконуючи дії над стовпцями, щоб зробити нулі в першому рядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$=2 - 4 - 6 - 2 - 3 - 8 = -21$.

1.2. Система лінійних алгебраїчних рівнянь. Застосування визначників для їх розв'язування, формули Крамера

1.2.1. Система лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення. *Системою m лінійних рівнянь з n невідомими* $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases}$$

Числа, $a_{ij}, \; i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n$ біля невідомих називаються *коефіцієнтами*, а числа b_i − *вільними членами системи.*

Система рівнянь називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю і *неоднорідною*, якщо хоча б один з них не дорівнює нулеві.

Упорядкований набір n чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (вказано порядок слідування цих чисел) називається *розв'язком системи*, якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Дві системи лінійних рівнянь називається *еквівалентними*, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків. Еквівалентні системи одержують внаслідок елементарних перетворень даної системи. До елементарних перетворень відносяться:

1. перестановка місцями двох рівнянь;
2. множення рівняння на відмінне від нуля число;
3. додавання до довільного рівняння іншого рівняння, попередньо помноженого на відмінне від нуля число.

1.2.2. Формули Крамера розв'язування системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Означення. Визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих цієї системи

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи* (або головним визначником).
Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$) , то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$

Тут Δ_j − визначник, утворений із визначника Δ заміною j –го стовпця, стовпцем із вільних членів.

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

Розв'язок системи знаходять за *формулами Крамера*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ \text{якщо } \Delta \neq 0.$$

Доведення. Виконаємо такі елементарні перетворення системи:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times a_{22} \\ \times(-a_{12}) \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} \times a_{21} \\ \times(-a_{11}) \end{matrix} \right. ;$$

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ y(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}. \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ y(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2 a_{11} - b_2 a_{21}. \end{cases} \begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи, називається *визначником системи*. Визначники Δ_x. Δ_y утворюються з Δ заміною першого і другого відповідно стовпців при невідомих *x* і *y* вільними членами.

При розв’язуванні останньої системи можливі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв’язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$$

2) $\Delta = 0$ і $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, тоді система несумісна;

3) $\Delta = 0$ і $\Delta_x = \Delta_y = 0$, тоді система безліч розв’язків.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими *x*, *y* і *z*:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то дана система має єдиний розв'язок, який знаходиться за *формулами Крамера*: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

Доведемо другу формулу, тобто $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$. Для цього помножимо всі три рівняння системи на алгебраїчні доповнення коефіцієнтів при *y*, тобто A_{12}, A_{22}, A_{32} і додамо їх:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32})x + (a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32})y +$$

$$+ (a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32})z = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} = \Delta_y.$$

(Вирази в першій і третій дужках дорівнюють нулю за властивістю 10, а в другій згідно властивості 9 дорівнює Δ).

Отже, $\Delta \cdot y = \Delta_y$. Звідси отримуємо, що $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Аналогічно доводяться інші формули.

Формули Крамера можна використовувати і для розв'язування системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, якщо $\Delta \neq 0$ (визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих). Якщо ж Δ=0, а також, якщо число невідомих не дорівнює числу рівнянь, то існує інший метод розв'язування такої системи.

1.2.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*. Це *метод послідовного виключення невідомих* з рівнянь системи , тобто систему за допомогою елементарних перетворень зводять до трапецієподібного або трикутного вигляду.

Розглянемо метод Гаусса на прикладі

Приклад. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x+3y-3z=1, \\ x+y+z=2, \\ 4x-2y+3z=-5. \end{cases}$$

Розв'язування. Першим рівнянням краще вибирати те, в якому коефіцієнт при невідомому x рівний одиниці. Для цього ліву і праву частини першого рівняння можна поділити на "2". Однак в даному прикладі зручніше поміняти місцями перше та друге рівняння:
$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y-3z=1, \\ 4x-2y+3z=-5. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x в другому та третьому рівняннях системи.Для цього перше рівняння помножимо на "–2", "–4" і додамо відповідно до другого та третього рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z \ =2, \\ \quad y-5z=-3, \\ -6y-z=-13. \end{cases}$$

Для виключення невідомого y в третьому рівнянні додамо до нього друге, помножене на "6":

$$\begin{cases} x+y+z\ =\ 2, \\ \quad\ \ y-5z=-3, \\ \qquad -31z=-31. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо z = 1. Підставивши значення z = 1 в друге рівняння, одержимо y = 2. Із першого рівняння x = –1.

Таким чином, числа –1; 2; 1 є розв'язком вихідної системи лінійних рівнянь.

Часто на практиці замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над матрицею, складеною з коефіцієнтів при невідомих і стовпця з вільних членів, який для зручності виділимо вертикальною лінією. Таку матрицю називають розширеною матрицею системи.

1.3. Матриці. Дії над матрицями, обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

1.3.1. Основні поняття

Означення. Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n, складена з m рядків та n стовпців і записана а вигляді

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

називається *матрицею*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики Уільям Гамільтон (1805-1865) і Артур Келі (1821-1895). Матрицю позначають $A=(a_{ij})$ або $A=\|a_{ij}\|$, де a_{ij} − елементи матриці, i – номер рядка, j – номер стовпця.

Розміром матриці називається символічний добуток числа рядків m на число стовпців n матриці. $A_{m\times n}$ − прямокутна матриця. *Квадратною матрицею* називається матриця, у якої m = n. *Порядком квадратної матриці* називається число її рядків (стовпців).

Матрицею-рядком (матрицею-стовпцем) називається матриця, з одного рядка (стовпця). *Нульовою матрицею називають* матрицю, у якої всі елементи нульові і позначають $O_{m\times n}$. *Діагональною матрицею* називається квадратна матриця, у якої всі елементи, крім тих, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю:

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & . & 0 \\ .. & .. & . & .. & .. \\ 0 & . & 0 & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & . & . & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одиничною називається діагональна матриця, у якої всі елементи, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & .. & .. & .. & .. \\ 0 & . & .0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Трикутною (нижньою трикутною або верхньою трикутною відповідно) називається матриця вигляду

$$T_1=\begin{pmatrix} t_{11} & & & 0 \\ t_{21} & t_{22} & & \\ . & . & . & . \\ t_{n1} & t_{n2} & . & t_{nn} \end{pmatrix} \text{ та } T_2=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & . & t_{1n} \\ & t_{22} & . & t_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & & . & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці A і B; $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називаються *рівними*, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.Будь-якій числовій квадратній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність певне число, яке називають *визначником матриці A* і позначають $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для прямокутної матриці розміром $m\times n$ $(m \neq n)$ існує поняття псевдовизначника.

1.3.2. Дії над матрицями

1. Додавання: вводиться для матриць однакового розміру.

Сумою матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$, де $(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Щоб додати матриці одного розміру потрібно додати їх відповідні елементи.

Приклад. Додати дві матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Множення матриці на число $k\neq 0$:

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число $k \neq 0$ або числа $k \neq 0$ на матрицю $A_{m\times n} = (a_{ij})$ називається матриця $B_{m\times n} = k\ A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot k$; $b_{ij} = (k\,a_{ij})$.

3. Віднімання матриць: різниця матриць $A–B$ визначається як сума матриць A і $(–1)B$

$A–B = A+(–1)\,B$; $A_{m\times n} - B_{m\times n} = C_{m\times n}$; $(c_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$.

Щоб відняти матриці одного розміру потрібно відняти їх відповідні елементи. Дії додавання, віднімання матриць, а також множення матриці на число називаються лінійними операціями.

Властивості операцій додавання і множення на число над матрицями:

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $A + \mathrm{O} = A$; $A - A = \mathrm{O}$;
4) $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A$;
5) $\alpha\,(A+B) = \alpha A+\alpha B$;
6) $(\alpha+\beta)\,A = \alpha\,A+\beta A$;
7) $1\,A = A$,

де α і β − числа, відмінні від нуля.

1.3.3. Транспонована матриця та її властивості

Нехай A – деяка матриця розміру $m\times\, n$ з елементами a_{ij}, $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$.

Означення. Матрицею ***транспонованою*** до матриці A називається матриця A^T розмірності $n\times m$: $A^T = (a_{ji})$.

Іншими словами, i-тим стовпчиком транспонованої матриці є i-тий рядок вихідної і навпаки: j-тим рядком транспонованої матриці є j-тий стовпчик вихідної матриці.

Приклад**.** Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, тоді $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Нехай маємо вектор-стовпець $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, тоді при транспонуванні одержимо вектор-рядок $(1 \quad 0 \quad -1)$.

Очевидні властивості транспонованих матриць:

$$\left(A^T\right)^T = A, \ \ (A+B)^T = A^T + B^T$$

Квадратна матриця $A=(a_{ij})$ називається ***симетричною***, якщо $a_{ij} = a_{ji}$, тобто $A = A^T$.

Означення. Квадратна матриця $A=(a_{ij})$ називається ***кососиметричною***, якщо $a_{ij} = -a_{ji}$, тобто $A = -A^T$.

Зауваження. Для діагональних елементів кососиметричної матриці виконується рівність $a_{ii} = 0$.

Твердження. Будь-яка квадратна матриця може бути подана у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць.

Доведення випливає з наступної рівності:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right).$$

Приклад**.** Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ є симетричною, а матриця $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ – кососиметричною.

1.3.4. Множення матриць

Дві прямокутні матриці *A* і *B* називаються *узгодженими*, якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*. У іншому випадку ці матриці називаються *неузгодженими*. Якщо матриці *A* і *B* узгоджені, то матриці *B* і *A* можуть бути неузгодженими. Будь-які дві квадратні матриці однакового порядку завжди узгоджені.

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times k}$ називається матриця $C_{m\times k}$, у якій кожний елемент c_{ij} ($i = 1, 2,\ldots, m$, $j = 1, 2,\ldots, k$) дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} .$$

$$C_{m\times k} = (c_{ij}),\ \ i = 1, 2,\ldots, m,\ \ j = 1, 2,\ldots, k .$$

Операція множення матриць має зміст лише для узгоджених матриць.

Властивості множення матриць.

1) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$;
2) $(\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$,
3) $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
4) $C\cdot(A + B) = C\cdot A + C\cdot B$;
5) $A\cdot O = O\cdot A = O$;
6) $A\cdot E = E\cdot A = A$;
7) $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$.

Зауваження 1. Добуток двох матриць може бути нульовою матрицею і тоді, коли кожна із матриць співмножників не є нульовою.

Зауваження 2. Добуток двох діагональних матриць одного і того ж порядку є діагональною матрицею того ж порядку, до того ж ці діагональні матриці комутують.

1.3.5. Прямий добуток матриць

Прямим добутком матриць $A_{m\times n}$ і $B_{s\times k}$ називається матриця

$$C = A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$ розміром $ms\times nk$.

1.3.6. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконуються рівності $AA^{-1}=A^{-1}A = E$.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ і *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Твердження. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою. Причому, якщо обернена матриця існує, то вона єдина і обчислюється за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

Доведення. Необхідність. Нехай існує обернена матриця A^{-1}. Доведемо, що матриця A – невироджена. Дійсно, тоді $AA^{-1}=E$. Тепер розглянемо $\det (AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Звідси $\det A \neq 0$, тобто A – невироджена матриця.

Достатність. Нехай A – невироджена, тобто $\det A \neq 0$. Покажемо, що A має обернену матрицю A^{-1}, причому

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.

Якщо розглянути добутки матриць $A\,A^{-1}$ і $A^{-1}A$, то всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, а недіагональні елементи дорівнюють нулю. Отже, $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.

Покажемо існування єдиність оберненої матриці методом від супротивного. Нехай існує ще одна матриця A'' − обернена до A. Тоді $A^{-1} = A^{-1} E = A^{-1} (A A'') = (A^{-1} A) A'' = E A'' = A''$.

Приклад. Обчислимо матрицю, обернену до $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det A = 4 - 6 = -2; \qquad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.3.7. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю $A_{m\times n}$.

Означення. *Мінором k-го порядку* матриці $A_{m\times n}$ називається визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині довільних k рядків і k стовпців. $k \le \min(m,n)$.

Рангом матриці A називається найбільший порядок k мінора матриці, відмінного від нуля. Позначають $rangA = r(A) = r$.

Базисні мінори – це мінори найвищого порядку, що відмінні від нуля.

1) Ранг матриці існує для будь-якої матриці, причому $0 \le rangA \le \min(m,n)$;
2) $rangA = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
3) $rang\,A_{n\times n} = n \Leftrightarrow A$ – невироджена;
4) $rang\,A_{n\times n} < n \Leftrightarrow A$ – вироджена;
5) $rang(A\cdot B) \le \min(rangA, rangB)$.

Способи обчислення ранг матриці

Розглянемо два методи знаходження рангу матриці.

1. Перший метод – *метод окантування* – полягає у наступному. Якщо всі мінори першого порядку, тобто елементи матриці, рівні нулю, то $r = 0$. Якщо хоч один із мінорів першого порядку не

дорівнює нулю, а всі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. Аналогічно, якщо мінор 2-го порядку відмінний від нуля, то досліджуємо мінори 3-го порядку. Таким способом знаходять ненульовий мінор k-го порядку і перевіряють, чи не дорівнюють нулю мінори (k +1)-го порядку. Якщо всі мінори (k + 1)-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці A дорівнює числу k . Такі мінори (k + 1)-го порядку, як правило, знаходять шляхом "окантування " мінора k-го порядку.

Розглянутий спосіб знаходження рангу матриці не завжди зручний, оскільки потрібно обчислювати велику кількість мінорів

2. *Елементарними перетвореннями матриці* називаються такі операції:

а) перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;

б) множення рядка (стовпця) матриці на число, що не дорівнює нулю;

в) додавання до елементів рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на те саме число, що не дорівнює нулю;

г) викреслювання рядка (або стовпця), який містить всі нульові елементи.

При таких елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Дві матриці називаються *еквівалентними*, якщо одна із них одержується з другої за допомогою скінченого числа елементарних перетворень.

Еквівалентні матриці не рівні між собою, зате вони мають однакові ранги.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то це записують так: ~ або $\Leftrightarrow$.

Приклад. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 10 & 14 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Остання матриця має ненульові мінори порядку 2, ранг дорівнює 2.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити ранг матриці $A-\lambda E$ при всіх значеннях параметра λ

а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці при всіх можливих значеннях параметра λ

а) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \lambda \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти $f(A)$, якщо:

а) $f(x)=3x^2-4,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $f(x)=x^2-3x+1,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $f(x)=3x^2-2x+5,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4. Критерій Кронекера-Капеллі сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases}$$

Складемо основну матрицю A з коефіцієнтів при невідомих і розширену $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема (Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

1) *Якщо* $rangA = rang\tilde{A} = n$ (числу невідомих), то система має єдиний розв’язок.
2) *Якщо* $rangA = rang\tilde{A} < n$, то система має безліч розв’язків.

Теорема Кронекера-Капеллі дає відповідь на запитання про існування розв’язку системи.

Однорідна система сумісна (завжди має нульовий розв’язок). Вона визначена, якщо основна матриця системи неособлива, і невизначена – якщо матриця системи особлива.

Приклад. Дослідити на сумісність систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$$

Знайдемо ранг розширеної та основної матриць системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Оскільки $rangA = 2$; $rang\,\widetilde{A} = 3$, тому система несумісна.

Приклад. Магазин торгує товарами: А – 45 шт., В – 30 шт. та С – 50 шт. за ціною 100, 200 і 50 гривень відповідно. Знайти денний дохід магазину.

$\mathrm{U} = x \cdot P$, де $x = (45 \quad 30 \quad 50)$, $P = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Тоді $\quad \mathrm{U} = x \cdot P = (45\ 30\ 50)\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix} = 13000$ гривень.

Приклад. Три магазини торгують товарами А, В, і С за ціною 100, 200 і 50 гривень відповідно. Знайти денний дохід кожного магазину зокрема і всіх в цілому.

	A	B	C
I	45	30	50
II	38	25	40
III	20	15	20

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = A \cdot P; \; A = \begin{pmatrix} 45 & 30 & 50 \\ 38 & 25 & 40 \\ 20 & 15 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13000 \\ 10800 \\ 6000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\mathrm{I} \\ -\mathrm{II} \\ -\mathrm{III} \end{array}$$

Сумарний дохід становить 13000+10800+6000=29800 гривень.

1.4.1. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Позначимо через A матрицю, складену із коефіцієнтів при невідомих (так звану основну матрицю системи); X − матрицю-стовпець із невідомих; B − матрицю-стовпець із вільних членів,

тобто $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати матричним рівнянням $AX = B$.

1. Якщо матриця A – невироджена, тобто $\det A \neq 0$, помножимо обидві частини рівняння на зліва на матрицю A^{-1}, обернену до матриці A:

$$A^{-1} A\, X = A^{-1} B; \quad E\, X = A^{-1} B; \quad X = A^{-1} B.$$

Отже, $X = A^{-1}B$ *– матричний запис розв'язку системи*.

Знаходження матричного розв'язку називається матричним способом розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Якщо основна матриця A системи лінійних рівнянь вироджена або прямокутна, то система може не мати розв'язків. Виникає проблема знаходження найкращого наближеного розв'язку. Відомо (Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 576 с.), що оптимальний наближений розв'язок знаходиться за формулою $X = A^{+} \cdot B$, де A^{+} − псевдообернена матриця до матриці A.

Означення. $n \times m$ -матриця A^+ називається псевдооберненою до $m \times n$ -матриці A, якщо виконуються рівності:

$$A \cdot A^+ \cdot A = A, \; A \cdot A^+ \cdot A = A^+, \; (A \cdot A^+)^T = A \cdot A^+, \; (A^+ \cdot A)^T = A^+ \cdot A.$$

Теорема. Для довільної $m \times n$ -матриці A існує причому єдина псевдообернена матриця A^+. (Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты / Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 570 с.)

Існують основні методи знаходження псевдооберної матриці – методи Фаддєєва, Келі-Гамільтона, Гревіля, Бен-Ізраеля.

Побудова псевдооберненої матриці

Нехай C $r \times n$ –матриця , $r<n$ і $rang\, C = r$. Тоді

$$C^+ = C^T \cdot (C \cdot C^T)^{-1}.$$

Нехай B $m \times r$ -матриця , $m > r$ і $rang\, B = r$. Тоді

$$B^+ = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T.$$

Для довільної $m \times n$ -матриці A рангу r псевдообернену матрицю A^+ будують наступним чином:

1. Здійснюємо скелетний розклад $A = B \cdot C$, де $m \times r$ -матриця B має ранг r, $r \times n$ -матриця C має ранг r.

2. Будуємо матриці C^+ і B^+. Матриця A^+ обчислюється з наступного виразу $A^+ = (B \cdot C)^+ = C^+ \cdot B^+$.

Наслідок. Якщо $A - n \times n$-матриця, $rang\, A = n$, то $A^+ = A^{-1}$.

1.4.2. Однорідна система лінійних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо вона має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Вона одержується із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо всі її вільні члени $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Розширена матриця $\tilde{A}$ цієї системи одержується із основної матриці A, якщо приєднати нульовий стовпець. Тому ранг матриці A рівний рангу розширеної матриці $\tilde{A}$. До того ж за теоремою Кронекера-Капеллі вихідна система завжди сумісна.

Якщо ранг матриці A системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості невідомих ($r = n$) , то система має єдиний нульовий (тривіальний) розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, бо визначник основної матриці системи відмінний від нуля.

Система n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має ненульові розв'язки тільки тоді, коли визначник системи, складеної із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих дорівнює нулю ($\Delta = 0$). Тобто, система має ненульові розв'язки тільки тоді, коли $r < n$, де r − ранг матриці A , а n − кількість невідомих.

Розглянемо однорідну систему n рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Якщо визначник однорідної системи рівнянь $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, то система має лише нульові розв'язки, бо всі $\Delta_{x_i} = 0$, тоді $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta} = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приклад. Розв'язати систем рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-5y+2z=0 \\ x+4y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y-3z=0 \quad \times(-2) \\ 2x-5y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ \quad -13y+8z=0 \end{cases}$

$y=\dfrac{8}{13}z$; нехай $z=13t$; тоді $y=18$, $x=3z-4y=39t-32t=7t$.

2) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+5z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+2z=0 \\ -3y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+2z=0 \\ -z=0 \end{cases}$; $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

II метод) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 2 - 1 + 4 - 9 = 1 \neq 0$, тому система має лише нульовий розв'язок. Відповідь. (0;0;0).

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки кількість рівнянь ($m = 3$) співпадає з кількістю невідомих ($n = 3$) , а визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

відмінний від нуля, то задана система лінійних однорідних рівнянь має тільки нульовий розв’язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад. Розв’язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо ранг матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих. Для цього зведемо її до діагонального вигляду з допомогою елементарних перетворень:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці, а значить, і еквівалентної їй матриці A дорівнює 3 ($r = 3$) і менший, ніж число невідомих, а тому вихідна система має ненульові розв’язки. Візьмемо ті рівняння заданої системи, в яких коефіцієнти при невідомих утворюють базисний мінор, наприклад: $M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8,$ який відмінний від нуля.

Задана система лінійних рівнянь еквівалентна такій:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ x_1 + \ \ x_4 + x_5 \ = -3x_2 + x_3, \\ 2x_1 + \ \ x_4 \qquad = -6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Розв'яжемо її, відносно невідомих x_1, x_4, x_5 методом Гаусса. Виключимо x_1 в другому і третьому рівняннях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ \quad 3x_4 + 2x_5 \ = 0, \\ \ -7x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Виключимо x_4 в третьому рівнянні

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ \qquad 3x_4 + 2x_5 \ = 0, \\ \qquad\qquad -\dfrac{8}{3}x_5 = 0. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо, що $x_5 = 0$, а тому $x_4 = 0$ (із другого рівняння). З першого рівняння одержимо $x_1 = -3x_2 + x_3$.

При довільних значеннях вільних невідомих $x_2 = t, x_3 = p$ одержимо розв'язок $(-3t + p,\ t,\ p,\ 0,\ 0)$.

Наприклад, один із частинних розв'язків такий: $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$.

Твердження. Якщо визначник Δ системи n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими дорівнює нулю, а серед алгебраїчних доповнень A_{ij} (i = 1, 2,..., n; j = 1, 2,..., n) елементів i-го рядка є ненульові, то ця система має ненульовий розв'язок: $x_j = A_{ij} \cdot t$. Тут t − деякий параметр.

1.4.3. Система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

1. При розв'язанні СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

необхідно з'ясувати її сумісність. Для цього необхідно обчислити і порівняти ранги основної та розширеної матриць.

Якщо $rangA \neq rang\tilde{A}$, то за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.

Якщо $rangA = rang\tilde{A} = r < n$, то система сумісна і для того, щоб розв'язати систему, необхідно вибрати базисний мінор (мінор − порядок якого визначає ранг матриці). Нехай це r перших рядків та r перших стовпців у матриці A, тобто

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

У цьому випадку початкова система буде еквівалентною системі, складеної з r перших рядків (решту рівнянь відкидаємо):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

2. При розв'язанні цієї системи можуть бути два варіанти. При $r = n$ система має єдиний розв'язок. Якщо $r < n$ можемо

прийняти змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ за вільні, тобто вони можуть приймати довільні числові значення. Решта r невідомих називається базисними. Вони задовольняють наступній СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Цю систему можна трактувати як систему r рівнянь з r невідомими з визначником, рівним базисному мінору $M \neq 0$. В цьому випадку базисні змінні виражаються через вільні змінні.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

З'ясуємо сумісність даної системи. Знайдемо ранг розширеної та основної матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & :-1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & :-7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & :-8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & :-1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & :-5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & :-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & :-1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & :-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :\ 0 \end{pmatrix}$$

Ранги розширеної та основної матриць рівні 2, за базисний мінор візьмемо $M = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, відповідно базисними змінними є $x_1,\ x_2$, а вільними $x_3,\ x_4$. Розглянемо систему $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 - 2x_3, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4, \end{cases}$

звідки отримуємо $\begin{cases} x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4, \end{cases}$ де $x_3,\ x_4$ – довільні числа.

1.5. Матричне числення в редакторі електронних таблиць Excel

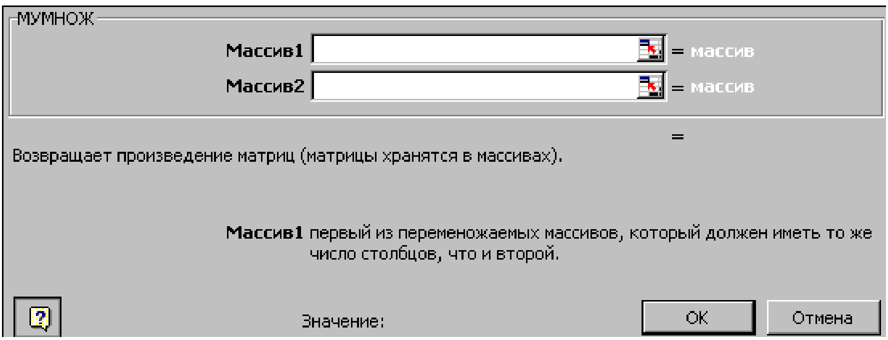
У Excel для обчислення визначника квадратної матриці, оберненої матриці, добутку двох матриць і застосовують стандартні математичні функції МОПРЕД, ТРАНС, МОБР, МУМНОЖ. Для обчислення визначника 5×5-матриці **A** з масиву B2:F6 вводимо у комірку для результату формулу =МОПРЕД(B2:F6).

Для запису 3×5-матриці **B’**, транспонованої до 5×3-матриці **B** з масиву B9:D13, виділяють (виокремлюють) масив G16:K18 і вводять формулу =ТРАНСП(B6:D13). Для отримання результату обчислення, який міститиметься в масиві, а не в одній комірці, натискають одночасно клавіші Ctrl+Shift+Enter.

Подібним способом в масиві I2:M6, ввівши функцію МОБР(B2:F6), обчислюємо матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ (**A**^-1), обернену до матриці **A**. Добуток 5×5-матриці **A** на 5×3-матрицю **B** запишемо в масиві G9:I13. З цією метою його виділяють і вводять формулу = МУМНОЖ(B2:F6;B9:D13) та натискають Ctrl+Shift+Enter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		1	2	3	4	5			-0,49805	0,33658	-0,17802	0,50875	-0,13521	
3		2	0	4	-3	9			0,21556	-0,10739	-0,02412	-0,12996	0,11829	
4	**A** =	3	-1	11	6	12		**A**^-1 =	-0,12218	-0,23696	0,22938	-0,19981	0,14144	
5		4	4	6	8	5			0,10739	-0,02101	-0,02646	0,08327	-0,06381	
6		5	9	7	0	7			0,20078	0,13463	-0,07121	0,00350	-0,05409	
7														
8														
9		1	2	3			55	44	40					
10		2	-1	0			47	79	111					
11	**B** =	3	3	9		**A B** =	118	124	150					
12		4	0	-5			87	57	56					
13		5	7	6			79	71	120					
14														
15	det **A** =	5140												
16							1	2	3	4	5			
17						**B'** =	2	-1	3	0	7			
18							3	0	9	-5	6			
19														

Обчислення визначника і оберненої для квадратної матриці, транспонованої матриці, добутку двох матриць можна проводити з використанням майстрів функцій МОПРЕД, ТРАНС, МОБР, МУМНОЖ. Наприклад, для знаходження добутку матриці $\mathbf{A}_{m\times n}$ на матрицю $\mathbf{B}_{n\times k}$ виділяють масив розміру $m\times k$, в якому буде записаний результат множення. Далі викликають математичну функцію МУМНОЖ з двома входами, куди вказують координати першого і другого співмножників. Для завершення натискають одночасно клавіші Ctrl+Shift+Enter. Замість клавіші Enter можна використати Ok у майстрі функції МУМНОЖ.



1.6. Власні числа та власні вектори матриці

Означення. Вектор $\vec{x} \neq 0$ називається власним вектором матриці *A*, якщо знайдеться таке число λ, що $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, де число λ називається власним значенням матриці A, яке відповідає вектору $\vec{x}$.

Запишемо рівність $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ в матричній формі $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ чи розпишемо в координатній формі

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_{nn} = 0. \end{cases}$$

Ця система має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця $A - \lambda E$ є виродженою, тобто визначник системи, який є дорівнює нулю. Рівняння $|A - \lambda E| = 0$ многочленом *n*-го степеня відносно λ, називається характеристичним рівнянням матриці A.

Приклад. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо систему для знаходження власних чисел і власних векторів, а саме

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + (4 - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Як нам уже відомо, для того, щоб ця система мала ненульові розв'язки, потрібно , щоб визначник цієї системи дорівнював нулю, тобто $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$. Коренями цього квадратного рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ Таким чином знаходимо власні (характеристичні) числа $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$. Тепер знайдемо власні вектори, які відповідають знайденим власним числам.

Щоб знайти координати власного вектора, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$ підставляємо $\lambda_1 = 2$ в систему:

Одержимо $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$ звідси $x_1 = 2t,\ x_2 = t;\ t \neq 0$ є розв'язком цієї системи. Отже, вектор $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix},\ t \neq 0$ є власним вектором-стовпчиком матриці *A*.

Для знаходження координат власного вектора матриці *A*, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$ поступаємо аналогічно. Вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$ є власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$.

1.7. Квадратичні форми

Означення. Квадратичною формою $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ від *n* змінних називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних, взятих з деяким коефіцієнтом, тобто $L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

Допускаємо, що в квадратичній формі коефіцієнти a_{ij} дійсні числа.

Розпишемо квадратичну форму, розбивши доданки, що містять добутки змінних на дві рівні частини

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ...$$
$$+\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{n,\,n-1}x_nx_{n-1} + a_{nn}x_n^2 .$$

Матриця $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ є симетричною,

оскільки $a_{ij}=a_{ji}$, називається матрицею квадратичної форми.

Рангом квадратичної форми називається ранг її матриці. Квадратична форма називається невиродженою, якщо її матриця невироджена.

Якщо $X^T=\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, то квадратичну форму можна переписати в матричному вигляді $L(x_1, x_2, ..., x_n)=X^T AX$.

Приклад 1. Записати в матричному вигляді квадратичну форму

$$L(x_1, x_2, ..., x_n)=2x_1^2-3x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+2x_1x_3.$$

Розв'язання. Матриця даної квадратичної форми має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значить $L(x_1, x_2, ..., x_n)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Квадратична форма називається *канонічною* (має канонічний вигляд), якщо всі $a_{ij}=0$, коли $i\neq j$. Тоді квадратична форма буде мати вигляд $L(x_1, x_2, ..., x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+...+a_{nn}x_n^2$

Розглянемо таку теорему.

Твердженння. Довільна квадратична форма зводиться до канонічного вигляду.

Примітка. Дійсна квадратна матриця називається ортогональною, якщо сума квадратів елементів кожного стовпчика дорівнює одиниці і сума добутків відповідних елементів із двох різних стовпчиків дорівнює нулю. Необхідною і достатньою умовою ортогональності матриці B є умова $B^T B = E$.

Приклад 2. **З**вести квадратичну форму $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ до канонічного вигляду з допомогою ортогональної матриці і знайти її.

Розв'язання. Матриця даної квадратичної форми має вигляд $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Запишемо систему для знаходження власних чисел і власних векторів $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$

Характеристичне рівняння даної системи має вигляд

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$.

Розв'язавши дане рівняння знаходимо $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1$. Значить канонічний вигляд даної квадратичної форми є $6y_1^2 + 2y_2^2$ (в канонічній формі коефіцієнти є власними числами матриці A).

Знайдемо ортогональну матрицю. Стовпчиками ортогональної матриці, яка приводить квадратичну форму до канонічного вигляду є ортонормовані власні вектор-стовпчики матриці A.

Спочатку знайдемо нормований власний вектор-стовпчик матриці A з власним значенням $\lambda_1 = 6$. Для цього із системи отримуємо систему для знаходження координат власного вектора

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 = 0. \end{cases}$$

Із даної системи знаходимо $x_2 = 2x_1$ або $t_2 = 2t_1$.

Значить при довільному t_1, відмінному від нуля, стовпчик $\begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix}$ є власним вектором-стовпчиком матриці *A*, а стовпець $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ є нормованим власним вектором-стовпчиком матриці *A*. Тут використано, що $\vec{a}^{\bullet} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Аналогічно знаходимо вектор-стовпчик матриці *A* з власним значенням $\lambda_2 = 1$ з системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо $x_1 = -2x_2$ або при довільному s, яке відмінне від нуля, стовпчик $\begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}$ є власним вектором матриці *A*. Стовпчик $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ є нормованим власним вектором матриці *A*. Значить шукана матриця має вигляд $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Зауваження. Легко перевірити, що $C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розглянемо на прикладі ще один метод зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду полягає в послідовному виділенні повних квадратів.

Приклад 3. **З**вести до канонічного вигляду квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$ методом Лагранжа. Спочатку виділимо повний квадрат при змінній x_1, коефіцієнт при якій відмінний від нуля.

$$L = [x_1^2 - 2x_1(3x_2 - 2x_3) + (3x_2 - 2x_3)^2] + 2x_2x_3 + x_3^2 - (3x_2 - 2x_3)^2 =$$
$$= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2x_3 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 3x_3^2 = (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 +$$
$$+2x_2x_3 + x_3^2 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 4x_3^2 = (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 - 9(x_2^2 - \frac{2\cdot 7}{9}x_2x_3 + \frac{49}{81}x_3^2) =$$
$$= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 - 9(x_2 - \frac{7}{9}x_3)^2 + \frac{22}{9}x_3^2.$$

Отже, невироджене лінійне перетворення

$$y_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ \ y_2 = x_2 - \frac{7}{9}x_3,\ \ y_3 = x_3$$

зводить дану канонічну форму до канонічного вигляду

$$L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 9y_2^2 + \frac{22}{9}y_3^2.$$

Канонічний вигляд квадратичної форми не є однозначним, оскільки одна й та ж квадратична форма може бути зведена до канонічного вигляду багатьма способами. Однак одержані різними способами квадратичні форми мають ряд спільних властивостей.

Сформулюємо властивість, яка виражає закон інерції квадратичних форм, що полягає в наступному: всі канонічні форми, до яких приводиться дана квадратична форма, мають:

1) одне й те ж число нульових коефіцієнтів;

2) одне й те ж число додатних коефіцієнтів;

3) одне й те ж число від’ємних коефіцієнтів.

Означення. Квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається додатно визначеною, якщо для всіх дійсних значень $x_1, x_2, ..., x_n$ використовується нерівність $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$.

Якщо $L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$, то квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається від'ємно визначеною.

Якщо квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ може набувати від'ємних і додатних значень, то вона називається невизначеною.

Твердження. Для того, щоб квадратична форма $L = X^T AX$ була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі власні значення λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ матриці A були додатними (від'ємними).

Твердження (критерій Сільвестра). Для того, щоб квадратична форма була додатно визначеною, необхідно і досить, щоб всі головні мінори матриці цієї форми були додатними, тобто

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_1 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Слід зауважити, що для від'ємно визначених квадратичних форм знаки головних мінорів чергуються, починаючи з знаку "мінус" для мінора першого порядку.

Квадратична форма L в прикладі 2 є додатно визначеною бо корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 6$ і $\lambda_2 = 1$ є додатними. Оскільки головні мінори матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ є додатними, то за критерієм Сільвестра дана квадратична форма є додатно визначеною.

Рекомендована література

1. Коляда Р. Вища математика в задачах і прикладах: навч. посіб. / Ростислава Коляда, Іванна Мельник, Орест Мельник. − Львів: СПОЛОМ, 2014. − 524 с.
2. Коляда Р. Вища математика / Р. В. Коляда, І. О. Мельник, О. М. Мельник. − Львів : Магнолія 2006, 2014. − 342 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі: навч. посіб. Ч. 1 / Г.Л.Кулініч, Л.О.Максименко, В.В.Плахотник, Г.Й.Призва. – К.: Либідь, 1992. − 288 с.
4. Дубовик В. Вища математика / Володимир Дубовик, Іван Юрик. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
5. Дубовик В., Збірник задач. Вища математика / Володимир Дубовик, Іван Юрик. – К.: Вища школа, 2001.
6. Завало С.Т. Курс алгебри – К.: Вища школа, – 1988. – 278 с.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. − М.: Физматлит., 2001. − 272 с.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. − М.: Физматлит., 2001. − 272 с.
9. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. − М.: Физматлит., 2001. − 368 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры − М.: Наука., 1968. - 432с.
11. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. − М.: Наука., 1970. − 400 с.
12. Ланкастер П. Теория матриц. − М.: Наука., 1982. − 272 с.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1989.
14. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. − М.: Мир., 1989. 655 с.
15. Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. Лінійна алгебра та аналітична геометрія – Л: Бескид Біт, 2002.
16. Дюженкова Л.Г., Носаль Т.В. Вища математика. - К.: ВШ, 2003.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Коляда Р. В., Мельник О. М.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Ч. 1. АЛГЕБРА МАТРИЦЬ

Методичні вказівки для студентів спеціальностей “Автоматизоване управління технологічними процесами” , ”Комп’ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва”, ”Комп’ютерні науки”

Видання виходить в авторській редакції

Підготовка до друку:
Шевчук Г.Я.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
ДК № 3050 від 11.12.2007 р.

Підписано до друку 10.09.2019 р.
Формат 60 90/16. Папір офсетний.
Обсяг 3,0 друк. арк.; 2,8 обл.-вид. арк.
Тираж 100. Зам. № ___

Видання Української академії друкарства,
79020, м. Львів, вул. Під Голоском, 19

Віддруковано в НВЛІТТ УАД
79008, м. Львів, пл. Митна, 1